

אלגברה לינארית (1) - פתרון תרגיל 13

11 בפברואר 2015

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ מממד n . בהינתן בסיס סדור $B = (v_1, \dots, v_n)$ ל- V , נגדיר העתקה $S_B: \mathbb{F}_{\text{col}}^n \rightarrow V$ על-ידי הנוסחה

$$S_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

ההעתקה S_B היא לינארית, חח"ע ועל ונותנת לנו איזומורפיזם בין המרחב $\mathbb{F}_{\text{col}}^n$ למרחב V . נשים לב שמתקיים $S_B^{-1}(v) = [v]_B$.

1. יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. יהיו בסיסים B_1, B_2 סדורים ל- V, W בהתאמה ונגדיר $A = [T]_{B_2}^{B_1}$.

(א) הראו כי $w \in \text{Im} T$ אם ורק אם $[w]_{B_2}$ שייך למרחב העמודות של A .

פתרון: צריך להראות כי מתקיים

$$\text{Im} T = \{w \in W \mid [w]_{B_2} \in \text{Im}(T_A)\}$$

מאחר ומרחב העמודות של A הוא בדיוק $\text{Im}(T_A)$. נראה הכלה דו-כיוונית.

$\text{Im} T \subseteq \{w \in W \mid [w]_{B_2} \in \text{Im}(T_A)\}$: יהי $w \in \text{Im} T$. אזי קיים $v \in V$ כך ש- $w = Tv$. מכאן,

$$[w]_{B_2} = [Tv]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1} = A \cdot [v]_{B_1}$$

ולכן $[w]_{B_2} \in \text{Im}(T_A)$ ו- $[w]_{B_2} = T_A([v]_{B_1})$.

$\{w \in W \mid [w]_{B_2} \in \text{Im}(T_A)\} \subseteq \text{Im} T$: יהי $w \in W$ כך ש- $[w]_{B_2} \in \text{Im}(T_A)$. כלומר, קיים $\vec{x} \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ כך ש- $[w]_{B_2} = T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. מכאן, נקבל כי

$$[w]_{B_2} = A\vec{x} = [T]_{B_2}^{B_1} \left[\sum_{i=1}^n x_i v_i \right]_{B_1} = \left[T \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right) \right]_{B_2}.$$

מאחר וההעתקה $S_{B_2}^{-1}$ היא חח"ע, נקבל כי $w = T(\sum_{i=1}^n x_i v_i)$ ולכן $w \in \text{Im}(T)$.

(ב) הסיקו כי $\dim \text{Im} T = \text{rank} [T]_{B_2}^{B_1}$.

פתרון: ההעתקה S_{B_2} חח"ע ולכן היא שולחת תתי-מרחבים לתתי-מרחבים מאותו המימד (ראו עמוד 7 בסיכום תרגול מס' 13). כמו כן,

$$\begin{aligned} S_{B_2}(\text{Im}(T_A)) &= \{S_{B_2}(T_A(\vec{x})) \mid \vec{x} \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n\} = \left\{ S_{B_2} \left(\left[T \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right) \right]_{B_2} \right) \mid \vec{x} \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n \right\} \\ &= \left\{ T \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right) \mid \vec{x} \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n \right\} = T(\text{Im}(S_{B_1})) = \text{Im}(T) \end{aligned}$$

כאשר השיויון האחרון נובע מכך ש- S_{B_1} היא על. מכאן, נקבל כי

$$\text{rank } A = \dim \text{Im}(T_A) = \dim S_{B_2}(\text{Im}(T_A)) = \dim \text{Im}(T)$$

כנדרש.

(ג) הראו כי $v \in \ker T$ אם ורק אם $[v]_{B_1}$ שייך למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$.

פתרון: צריך להראות כי מתקיים

$$\ker T = \{v \in V \mid [v]_{B_1} \in \ker(T_A)\}.$$

מאחר ומרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ הוא בדיוק $\ker(T_A)$. נראה הכלה דו-כיוונית.

$$\ker T \subseteq \{v \in V \mid [v]_{B_1} \in \ker(T_A)\} \text{ יהי } v \in \ker T. \text{ אזי}$$

$$\vec{0} = [Tv]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1} = A \cdot [v]_{B_1} = T_A([v]_{B_1})$$

$$\text{ולכן } [v]_{B_1} \in \ker(T_A).$$

$$\{v \in V \mid [v]_{B_1} \in \ker(T_A)\} \subseteq \ker T \text{ יהי } v \in V \text{ כך ש-} [v]_{B_1} \in \ker(T_A). \text{ אזי}$$

$$\vec{0} = T_A([v]_{B_1}) = [T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1} = [Tv]_{B_2}$$

$$\text{ומאחר ו-} S_{B_2}^{-1} \text{ חח"ע, נקבל כי } Tv = 0 \text{ ו-} v \in \ker T.$$

2. (א) נתונות המטריצות הבאות ב- $M_n(\mathbb{R})$. עבור כל מטריצה, בדקו האם היא הפיכה או לא ואם כן, מצאו את המטריצה ההופכית:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

פתרון: נתחיל במטריצה הראשונה משמאל. מתקיים

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ולכן דרגת המטריצה היא 1 ומכאן המטריצה לא הפיכה. נעבור למטריצה השנייה משמאל. עמודותיה בת"ל ולכן היא מדרגה 2 והפיכה. בשביל למצוא את המטריצה ההופכית, נשתמש בדירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 7 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 7 & -3 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה הפיכה ו-

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

באופן כללי יותר, אפשר להוכיח שמטריצה 2×2 כלשהי

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

הפיכה אם ורק אם $\det(A) = ad - bc \neq 0$ ובמקרה זה

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

נעבור למטריצה השלישית משמאל:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3=R_3+2R_2]{R_1=R_1-2R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1=(-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1=R_1-9R_3]{R_2=R_2+3R_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ולכן המטריצה הפיכה ו־

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

לבסוף, עבור המטריצה הרביעית, מתקיים

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{R_2=R_2-3R_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3=R_3-7R_2]{R_1=R_1+R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & 1 & -10 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=(-\frac{1}{32})R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{32} & \frac{10}{32} & \frac{7}{32} \end{array} \right) \xrightarrow[R_1=R_1-5R_3]{R_2=R_2-4R_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{32} & \frac{14}{32} & -\frac{3}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{32}{32} & -\frac{8}{32} & \frac{4}{32} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{32} & \frac{10}{32} & \frac{7}{32} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ולכן המטריצה הפיכה ו־

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{14}{32} & -\frac{3}{32} \\ \frac{32}{32} & -\frac{8}{32} & \frac{4}{32} \\ -\frac{1}{32} & \frac{10}{32} & \frac{7}{32} \end{pmatrix}.$$

(ב) העזרו בסעיף הקודם על-מנת למצוא את כל הפתרונות למערכות הלא הומוגניות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

פתרון: אנחנו יודעים שאם A מטריצה הפיכה אז למשוואה הלא הומוגנית $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד והוא נתון על-ידי $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. כל מה שנותר לנו זה להציב ולקבל את הפתרונות

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ -18 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5 & 14 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ונניח כי V נוצר סופית. יהיו B_1, B_2 זוג בסיסים סדורים ל- V .

(א) נסמן ב- $[\text{id}]_{B_2}^{B_1}$ את מטריצת מעבר הבסיסים מבסיס B_1 לבסיס B_2 . הראו כי A הפיכה ו- $A^{-1} = [\text{id}]_{B_1}^{B_2}$.

הוכחה: מתקיים

$$[\text{id}]_{B_2}^{B_1} [\text{id}]_{B_1}^{B_2} = [\text{id} \circ \text{id}]_{B_2}^{B_2} = [\text{id}]_{B_2}^{B_2} = I_n$$

ולכן A הפיכה (מצאנו לה הופכי מימין ולכן אוטומטית הוא גם הופכי משמאל) ו- $A^{-1} = [\text{id}]_{B_1}^{B_2}$.

(ב) ניקח $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו-

$$B = ((1, 2), (3, 7)), E = ((1, 0), (0, 1)).$$

תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך שמתקיים

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

מצאו את $[T]_E^E$ והשתמשו בזה על-מנת לכתוב נוסחא ל- $T(x, y)$ מהצורה $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
הצעה: מתקיים $[T]_E^E = [\text{id}]_E^B [T]_B^B [\text{id}]_B^E$. המטריצה $[\text{id}]_E^B$ מופיעה בשאלה הקודמת.

פתרון: מתקיים

$$[T]_E^E = [\text{id} \circ T \circ \text{id}]_E^E = [\text{id}]_E^B [T]_B^B [\text{id}]_B^E.$$

את המטריצה $[\text{id}]_E^B$ קל לכתוב. עמודותיה שוות למקדמי ההצגה של איברי הבסיס B ביחס לבסיס הסטנדרטי ולכן

$$[\text{id}]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

המטריצה $[\text{id}]_B^E$ היא המטריצה ההופכית של $[\text{id}]_E^B$ ומצאנו אותה בשאלה הקודמת:

$$[\text{id}]_B^E = ([\text{id}]_E^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

נשלב ונקבל כי

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}.$$

מכאן, $T(x, y) = (-5x + 3y, -14x + 8y)$ (וודאו שאתם מבינים למה!).

4. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

(א) נניח כי V נוצר סופית. תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. נניח כי קיימת $S: V \rightarrow V$ כך ש- $T \circ S = \text{id}_V$. הוכיחו כי גם $S \circ T = \text{id}_V$.

פתרון: נתחיל בלהזכיר שתי טענות כלליות על העתקות בין קבוצות (לאו דווקא העתקות לינאריות בין מרחבים וקטוריים).

טענה (1): תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה. אזי f היא על אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ g = \text{id}_B$.

הוכחה: נניח כי f היא על. יהי $b \in B$. אזי, מאחר ו- f על, קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$. ייתכן שקיימים הרבה מקורות כאלה ל- b - נבחר¹ אחד מהם ונגדיר את $g(b)$ להיות a . באופן זה, נקבל פונקציה $g: B \rightarrow A$ המקיימת $f \circ g = \text{id}_B$. להפך, אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ g = \text{id}_B$ אז לכל $b \in B$ מתקיים $f(g(b)) = b$ ולכן $g(b)$ מקור של b תחת f ולכן f על.

טענה (2): תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה. אזי f היא חח"ע אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = \text{id}_A$.

הוכחה: ההוכחה דומה להוכחה של טענה (1).

לצורך פתרון הסעיף, נצטרך רק כיוון אחד של טענה (1) אבל בחרנו להציג את שתי הטענות מאחר והן מדגימות שבאופן כללי, בלי קשר להעתקות לינאריות, קיום הופכי מימין לפונקציה שקול לכך שהפונקציה היא על וקיום הופכי משמאל שקול לכך שהפונקציה היא חח"ע. אם הפונקציה היא חח"ע ועל אז קיימים הופכיים משני הצדדים והם שווים ונקראים "הפונקציה ההופכית". באופן כללי, אין שום סיבה בעולם שאם קיים לפונקציה הופכי מימין (כלומר, הפונקציה על) אז קיים לה הופכי משמאל (כלומר, הפונקציה היא גם חח"ע) אבל להעתקות לינאריות בין מרחבים וקטוריים סוף מימדיים **מאותו** מימד זה כן נכון.

בחזרה להוכחה. מהנתון, נובע ש- T היא על ולכן $\dim \text{Im} T = \dim V$. ממשפט המימדים, נובע כי $\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im} T = \dim V - \dim V = 0$ ולכן T חח"ע. מאחר ומתקיים

$$T(S(T(v))) = T(v)$$

ומאחר ו- T חח"ע נקבל כי $S(T(v)) = v$ לכל $v \in V$ ולכן $S \circ T = \text{id}_V$.

(ב) תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ ומטריצה ונניח כי קיימת $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $AB = I_{n \times n}$. הוכיחו כי גם $BA = I_{n \times n}$. **הצעה:** עברו מ- A להעתקה T_A והשתמשו בסעיף הקודם.

פתרון: נתבונן בהעתקות $T_A, T_B: \mathbb{F}_{\text{col}}^n \rightarrow \mathbb{F}_{\text{col}}^n$. מאחר ו- $AB = I_{n \times n}$ נובע מיד כי

$$\text{id}_{\mathbb{F}_{\text{col}}^n} = T_{I_{n \times n}} = T_{AB} = T_A \circ T_B$$

¹למי שימשך בלימודיו במתמטיקה, עצם היכולת שלנו לבחור איבר אחד מבין אוסף (שהוא פוטנציאלית אינסופי) כלשהו משתמשת באקסיומה של תורת הקבוצות שנקראת אקסיומת הבחירה.

ולכן מסעיף א' נובע כי גם $T_B \circ T_A = \text{id}_{\mathbb{F}_{\text{col}}^n}$ ולכן אם נסמן ב- E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}_{\text{col}}^n$ נקבל כי

$$BA = [T_B]_E^E [T_A]_E^E = [T_B \circ T_A]_E^E = [\text{id}_{\mathbb{F}_{\text{col}}^n}]_E^E = I_{n \times n}$$

כנדרש.

(ג) תנו דוגמא למרחב וקטורי V והעתקות **לא לינאריות** $T_i: V \rightarrow V$ כך ש- T_1 חח"ע אבל לא על ו- T_2 על אבל לא חח"ע.

פתרון: ניקח $V = \mathbb{R}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. ההעתקה $T_1(x) = \arctan(x)$ היא חח"ע אבל לא על $(\text{Im} T = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$. ההעתקה $T(x) = x^2(x-1)$ היא על (זהו פולינום ממעלה אי-זוגית ולכן ממשפט ערך הביניים למשל, למשוואה $T(x) = a$ יש פתרון לכל $a \in \mathbb{R}$) אבל לא חח"ע ($T(1) = T(0) = 0$).

(ד) תנו דוגמא למרחב וקטורי V והעתקה **לינאריות** $T_i: V \rightarrow V$ כך ש- T_1 חח"ע אבל לא על ו- T_2 על אבל לא חח"ע. **הצעה:** נסו לחפש דוגמאות ב- $V = l(\mathbb{R})$ (מרחב הסדרות האינסופיות).

פתרון: נשים לב שלא ניתן לבנות דוגמא כזאת אם V הוא מרחב וקטורי סוף-מימדי. ניקח את $V = l(\mathbb{R})$ ונתבונן בהעתקות ה- shift :

$$\begin{aligned} T_1(a_1, a_2, \dots) &= (0, a_1, a_2, \dots), \\ T_2(a_1, a_2, \dots) &= (a_2, a_3, \dots). \end{aligned}$$

קל לבדוק שהעתקות T_i הן העתקות לינאריות. ההעתקה T_1 "לא מאבדת אינפורמציה" ולכן היא חח"ע. פורמלית, אם $T_1(a_1, a_2, \dots) = T_1(b_1, b_2, \dots)$ אז

$$(0, a_1, a_2, \dots) = (0, b_1, b_2, \dots)$$

ולכן $a_i = b_i$ לכל $i \geq 1$. מנגד, T לא על כי לסדרה $(1, 0, 0, \dots)$ אין מקור.

בדומה, ההעתקה T_2 "שוכחת אינפורמציה" ולכן היא לא חח"ע:

$$T_2(1, 0, 0, \dots) = T_2(2, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots).$$

מצד שני, היא כן על מאחר ומתקיים $T_2 \circ T_1 = \text{id}_{l(\mathbb{R})}$.

5. נתבונן בהעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ הנתונה על-ידי

$$T(p) = (p(1), p'(1), p''(1)).$$

כאשר אנחנו מסמנים ב- p' את הנגזרת של p וב- p'' את הנגזרת השנייה של p . למשל,

$$T(1 + 2x + 3x^2) = (6, 8, 6).$$

יהי $B = (1, x, x^2)$ בסיס סדור ל- $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ויהי E הבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

(א) חשבו את $[T]_E^B$.

פתרון: מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1), \\ T(x) &= (1, 1, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1), \\ T(x^2) &= (1, 2, 2) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1) \end{aligned}$$

ולכן

$$A = [T]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ב) הראו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1} .

פתרון: המטריצה A היא משולשית עליונה ואיברי האלכסון של A שונים מאפס ולכן היא הפיכה (קל לראות שעמודות A בלתי-תלויות לינאריות). בשביל למצוא את A^{-1} , נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2=R_2-2R_3 \\ R_1=R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולכן קיבלנו כי

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(ג) היעזרו בסעיף ב' בשביל לכתוב נוסחא ל- $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (כמו בעמוד 6, סיכום תרגול מס' 13).

פתרון: בסעיף א', מצאנו את $[T]_E^B$ וראינו כי מדובר במטריצה הפיכה. לכן, מסעיף ב' בשאלה 1 נקבל כי $\dim \text{Im}(T) = \text{rank}[T]_E^B = 3$ ולכן T היא על ולכן חח"ע והפיכה. כמו כן, מתקיים

$$[T]_E^B [T^{-1}]_B^E = [T \circ T^{-1}]_E^E = [\text{id}]_E^E = I_n$$

ולכן $[T^{-1}]_B^E = A^{-1}$. מאחר ו- $[T^{-1}(v)]_B^E = [T^{-1}]_B^E [v]_E^E = [T^{-1}]_B^E [v]_E^E$, נקבל כי

$$[T^{-1}(a, b, c)]_B^E = A^{-1}[(a, b, c)]_E^E = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + \frac{c}{2} \\ b - c \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T^{-1}(a, b, c) = (a - b + \frac{c}{2}) + (b - c) \cdot x + \frac{c}{2} x^2.$$

מהגדרת T^{-1} , הפולינום $T^{-1}(a, b, c) = p$ צריך לקיים $p(1) = a, p'(1) = b, p''(1) = c$. כלומר, מצאנו פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-2 שהנגזרות שלו מסדר אפס ועד סדר 2 הם קבועים כלשהם. מי שמכיר את פולינום טיילור, יודע שהתשובה צריכה להיות

$$T^{-1}(a, b, c) = a + b(x - 1) + \frac{c}{2}(x - 1)^2$$

ואכן, אם נפתח סוגריים נראה שזה באמת מה שקיבלנו.

6. היזכרו כי $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ מממד $n \cdot m$. נסמן ב- $e_{ij} \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ את המטריצה בה התא ה- (i, j) הוא 1 ושאר התאים הם אפס. מפורשות,

$$(e_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k = i, l = j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

המטריצות e_{ij} עבור $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq m$ מהוות בסיס למרחב המטריצות $M_{n \times m}(\mathbb{F})$. נסמן ב- B את הבסיס הסדור של $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ המורכב מהוקטורים e_{ij} בסדר הבא:

$$B = (e_{11}, e_{21}, \dots, e_{n1}, e_{12}, e_{22}, \dots, e_{n2}, \dots, e_{1m}, e_{2m}, \dots, e_{nm}).$$

יהיו $l, m, n \in \mathbb{N}$ ותהי $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ מטריצה. נגדיר ההעתקה $L_A: M_{m \times l}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n \times l}(\mathbb{F})$ על-ידי $L_A(C) = A \cdot C$. ההעתקה L_A מקבלת מטריצה C , כופלת את C ב- A משמאל ומחזירה את התוצאה (מכאן השם L_A). השתכנעו כי מדובר בהעתקה ליניארית. שימו לב שאם $l = 1$ אז ההעתקה L_A היא בדיקת ההעתקה T_A שדיברנו עליה רבות בשיעורים ובתרגולים.

(א) (חימום) ניקח $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $l = m = n = 2$ ו-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

מצאו את $[L_A]_B^B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ ואת $\dim \operatorname{Im}(L_A)$. מצאו בסיס ל- $\ker L_A$ ובסיס ל- $\operatorname{Im} L_A$.

פתרון: נבדוק איך L_A מתנהגת על איברי הבסיס B . מתקיים:

$$\begin{aligned} L_A(e_{11}) &= L_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_{11} + 2 \cdot e_{21} + 0 \cdot e_{12} + 0 \cdot e_{22}, \\ L_A(e_{21}) &= L_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_{11} + 4 \cdot e_{21} + 0 \cdot e_{12} + 0 \cdot e_{22}, \\ L_A(e_{12}) &= L_A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_{11} + 0 \cdot e_{21} + 1 \cdot e_{12} + 2 \cdot e_{22}, \\ L_A(e_{22}) &= L_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_{11} + 0 \cdot e_{21} + 2 \cdot e_{12} + 4 \cdot e_{22} \end{aligned}$$

ולכן

$$[L_A]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

נשים לב ש- L_A היא מטריצת בלוקים אלכסונית (ראו הגדרה מפורטת בתרגיל 14) כאשר הבלוק A מופיע פעמיים על האלכסון. קל לראות שהעמודה הראשונה והשלישית של המטריצה הן בת"ל ועמודות 2 ו-4 תלויות בעמודות 1 ו-3 ולכן $\operatorname{rank}[L_A]_B^B = 2$ ומסעיף ב' בשאלה 1, גם $\dim \operatorname{Im}(L_A) = 2$. מכאן, גם $\dim \ker L_A = 2$. בשביל למצוא את הגרעין של L_A , אפשר למצוא את מרחב הפתרונות של המטריצה $[L_A]_B^B$ ואז להשתמש בשאלה 1, סעיף ג'. עבור המטריצה A , מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומאחר ו- $\operatorname{rank} A = 1$, מרחב הפתרונות של A נפרש על-ידי $(2, -1)^T$. מאיבר זה במרחב הפתרונות של A , אפשר לייצר שני וקטורים בלתי-תלויים ששייכים למרחב הפתרונות של $[L_A]_B^B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

בשפה של תרגיל 14, אפשר להבין את המוטיבציה לכך באמצעות חישוב התוצאה כמכפלה של מטריצות בלוקים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

אם כך, מצאנו את מרחב הפתרונות של $[L_A]_B^B$ ולכן משאלה 1, סעיף ג', נקבל כי

$$\ker L_A = \{C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid [L_A]_B^B [C]_B = 0_{2 \times 2}\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

דרך אחרת לחשוב על התוצאה היא באופן הבא: מכל וקטור עמודה $\vec{x} \in \mathbb{R}_{\text{col}}^2$ המקיים $A\vec{x} = \vec{0}$ אפשר לייצג שתי מטריצות - מטריצה אחת C_1 בה $\vec{x}$ יהיה העמודה הראשונה ובעמודה השנייה יהיו אפסים ומטריצה שניה C_2 בה $\vec{x}$ יהיה העמודה השנייה ובעמודה הראשונה יהיו אפסים. עבור $\vec{x} \neq 0$, המטריצות C_1 ו- C_2 יהיו בלתי-לוליות במרחב המטריצות $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (הוכיחו!) ויתקיים $AC_1 = AC_2 = 0_{2 \times 2}$. באופן הנ"ל, קיבלנו שתי מטריצות בלתי-לוליות שפורשות את הגרעין של L_A .

לגבי התמונה של L_A , משאלה 1, סעיף א', נקבל מיד כי

$$\text{Im}(L_A) = \{C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid [C]_B \in \text{Im}(T_{[L_A]_B^B})\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ב) הוכיחו כי $\dim \text{Im } L_A = l \cdot \text{rank } A$.

פתרון: נחשב את $[L_A]_B^B$. מתקיים

$$\begin{aligned} L_A(e_{ij}) &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{a_{1,i}}^{\text{jth column}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{n,i} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{1,i}e_{1j} + a_{2,i}e_{2j} + \dots + a_{n,i}e_{nj}. \end{aligned}$$

מכאן, המטריצה $[L_A]_B^B \in M_{nl \times ml}(\mathbb{F})$ היא מטריצת בלוקים אלכסונית שנראית כך:

$$[L_A]_B^B = \begin{pmatrix} A & \dots & 0_{n \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n \times m} & \dots & A \end{pmatrix}.$$

על האלכסון של $[L_A]_B^B$ יש l עותקים של המטריצה A . נסמן $k = \text{rank}(A)$ ונניח כי העמודות מהוות בסיס למרחב העמודות של A . נראה ש-

$$\text{Im } L_A = \text{Span} \{L_A(e_{j_i,r}) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq l\}$$

ושמדובר בבסיס ל- $\text{Im} L_A$ ונקבל כי $\dim \text{Im} L_A = l \cdot k = l \cdot \text{rank} A$. בדקו כי האינדקסים כאן מסתדרים עם הדוגמא הקודמת ונסו להבין מה קורה מעבר לפרטים הטכניים.

פרישה: אנחנו יודעים ש-

$$\text{Im}(L_A) = \text{Span} \{L_A(e_{ir}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq r \leq l\}$$

מאחר ו- $\{e_{ir}\}_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, l}$ בסיס ל- $M_{m \times l}(\mathbb{F})$. נראה ש- $\{L_A(e_{j_1, r}), \dots, L_A(e_{j_k, r})\}$ מאחר ו- $\{A\vec{e}_{j_1}, \dots, A\vec{e}_{j_k}\}$ בסיס ל- $\text{Span} \{A\vec{e}_{j_1}, \dots, A\vec{e}_{j_k}\}$ קיימים סקלרים λ_s כך ש-

$$A\vec{e}_i = \sum_{s=1}^k \lambda_s A\vec{e}_{j_s}.$$

כלומר,

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n-1,i} \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^k \lambda_s \begin{pmatrix} a_{1,j_s} \\ a_{2,j_s} \\ \vdots \\ a_{n-1,j_s} \\ a_{n,j_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{2,j_s} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{n-1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{n,j_s} \end{pmatrix}$$

עתה,

$$\begin{aligned} L_A(e_{ir}) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{a_{1,i}}^{\text{rth column}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{n,i} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{\sum_{s=1}^k \lambda_s a_{1,j_s}}^{\text{rth column}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{2,j_s} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{n-1,j_s} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{n,j_s} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{a_{1,j_1}}^{\text{rth column}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,j_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1,j_1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{n,j_1} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{a_{1,j_k}}^{\text{rth column}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,j_k} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1,j_k} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{n,j_k} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{s=1}^k \lambda_s L_A(e_{j_s r}). \end{aligned}$$

אי תלות: נניח כי קיימים סקלרים λ_{ir} כך ש-

$$\sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^l \lambda_{sr} L_A(e_{j_s r}) = 0_{n \times l}.$$

נפתח ונקבל כי

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^l \lambda_{sr} L_A(e_{j_s r}) &= \sum_{r=1}^l \begin{pmatrix} \text{rth column} \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{1,j_s} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{2,j_s} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n-1,j_s} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n,j_s} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^k \lambda_{s1} a_{1,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{1,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sl} a_{1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{s1} a_{2,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{2,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sl} a_{2,j_s} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{s1} a_{n-1,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n-1,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sl} a_{n-1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{s1} a_{n,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n,j_s} & \dots & \sum_{s=1}^k \lambda_{sl} a_{n,j_s} \end{pmatrix} = 0_{n \times l}. \end{aligned}$$

יש לנו כאן $n \cdot l$ משוואות ב- kl נעלמים. כל עמודה נותנת לנו n משוואות. מכאן, נקבל כי לכל $1 \leq r \leq l$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{2,j_s} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n-1,j_s} \\ \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} a_{n,j_s} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^k \lambda_{sr} A \vec{e}_{j_s} = \vec{0}_n$$

מכך שהעמודות $A \vec{e}_{j_1}, \dots, A \vec{e}_{j_k}$ הן בת"ל נקבל כי $\lambda_{sr} = 0$ לכל $1 \leq s \leq k$ ולכל $1 \leq r \leq l$ כנדרש.

הערה: אפשר להוכיח את הטענה גם בעזרת הכללה² של שאלה 4, סעיף ב', בתרגיל 14.

(ג) נניח כי $n = m$. הוכיחו כי הפיכה A אם ורק אם ההעתקה L_A היא חח"ע ועל. במידה ו- A הפיכה, מצאו את ההעתקה ההופכית $(L_A)^{-1}$.

פתרון: אם A הפיכה אז $\text{rank } A = n$ ולכן $\dim \text{Im}(L_A) = l \cdot n = \dim M_{n \times l}(\mathbb{F})$ ולכן L_A היא על. כמו כן, מאחר ו- $m = n$ אז מכך ש- L_A על נובע גם כי L_A חח"ע. להפך, אם L_A היא חח"ע ועל אז מהסעיף הקודם נקבל כי

$$\dim \text{Im}(L_A) = l \cdot n = l \cdot \text{rank}(A)$$

ולכן $\text{rank}(A) = n$ ו- A הפיכה (כי היא מדרגה מלאה). אם A הפיכה, $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$ מאחר ו-

$$(L_{A^{-1}} \circ L_A)(C) = L_{A^{-1}}(AC) = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = C$$

לכל $C \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. זאת כמובן גם ההעתקה ההופכית מימין.

²מדובר בהכללה כי בתרגיל 14 הנחנו כי המטריצות A_i כולן ריבועיות בעוד שאצלנו זה לא המצב.