

חזרה על הכלה בין חוקי הורן

2016, מאי 9

הרצאה 8

2

הרצאה 8

2016, מאי 9

הרצאה 8

1

מינוח וסימון

- נדבר בקיצור על "הומומורפיזם מ- Q_1 ל- Q_2 " במקום "הומומורפיזם מהסימנים של Q_1 לסימנים של Q_2 "
- הומומורפיזם h מ- Q_1 ל- Q_2 יסומן על ידי $h : Q_1 \rightarrow Q_2$

2016, מאי 9

הרצאה 8

4

הומומורפיזם

- נתונים שני חוקי הורן:
 $Q_1: H_1 \vdash B_1$
 $Q_2: H_2 \vdash B_2$
- הגדרה: מיפוי h מהסימנים של Q_1 אל הסימנים של Q_2 נקרא **הומומורפיזם** אם הוא מיפוי סימנים (כלומר, ממפה קבוע לעצמו) ובנוסף מקיים את שני התנאים הבאים:
 $h(H_1) = H_2$
 $h(B_1) \subseteq B_2$
 כלומר, ראש לראש ואטום באטום בגוף לאטום בגוף

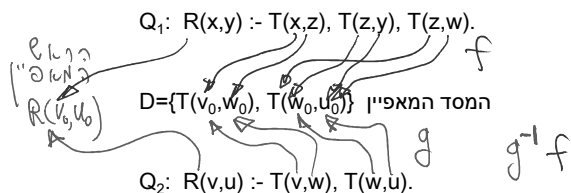
2016, מאי 9

הרצאה 8

3

תנאי הכרחי להכלה בין חוקי הורן

• למה 2: אם $Q_1 \geq Q_2$ אז יש הומומורפיזם מ- Q_1 ל- Q_2



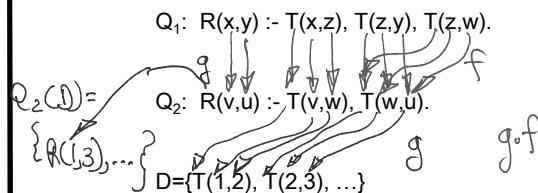
2016, מאי 9

הרצאה 8

6

תנאי מספיק להכלה בין חוקי הורן

• למה 1: אם יש הומומורפיזם מ- Q_1 ל- Q_2 אז $Q_1 \geq Q_2$



2016, מאי 9

הרצאה 8

5

הערה חשובה

- בהוכחה נוח לסמן קבוע ייחודי עבור משתנה x ע"י x_0 , כי כך ברור הקשר בין משתנה לקבוע הייחודי שנבחר עבורו
- אבל באופן פורמלי הקבועים הייחודים צריכים להיות מהתחום עליו מוגדר המסד, ולא קבועים חדשים שאנחנו ממציאים
- אנו מניחים שהתחום (עליו מוגדר המסד) הוא אינסופי, לכן תמיד אפשר לבחור קבועים עבור המשתנים, כך שהם שונים זה מזה וגם שונים מהקבועים שמופיעים בחוקים באופן מפורש

2016, מאי 9

הרצאה 8

8

סיכום אינטואיטיבי

- דנו בהכלה בין שני חוקי הורן Q_1 ו- Q_2
- למעשה הראנו שההכלה $Q_1 \geq Q_2$ שקולה לתנאי האדום:
- החוק Q_1 מייצר את הראש המאפיין של Q_2 (מהמסד שנוצר) מהגוף המאפיין של Q_2

הוכחה:

- אם התנאי מתקיים, אז לפי למה 2, יש הומומורפיזם $h : Q_1 \rightarrow Q_2$
- למה 1 מראה שהומומורפיזם הוא תנאי מספיק להכלה
- בכיוון ההפוך, אם יש הכלה, אז התנאי מתקיים, כי כל חוק (ובפרט Q_2) מייצר את הראש המאפיין של עצמו מהגוף המאפיין של עצמו

2016, מאי 9

הרצאה 8

7

איחוד שאליות

- הגדרה: איחוד שאליות הוא קבוצה של שאליות $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$
- הגדרה: בהינתן מסד D , התוצאה של איחוד שאליות $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ שתסומן ע"י $T(D)$, היא איחוד התוצאות של השאליות, כלומר

$$T(D) = \bigcup_{i=1}^n Q_i(D)$$

- שימו לב שהתוצאה היא קבוצה של אטומים קרקעיים

2016, מאי 9

הרצאה 8

10

איחוד של חוקי הורן

2016, מאי 9

הרצאה 8

9

אפיון הכלה בין איחודים של חוקי הורן (קרי, שאליות גימום)

- יהיו T ו- T' איחודים של חוקי הורן
- משפט: $T \geq T'$ אם ורק אם לכל $Q'_j \in T'$ קיים $Q_i \in T$ כך ש- $Q_i \geq Q'_j$
- באופן שקול, לכל $Q'_j \in T'$ קיים $Q_i \in T$ כך שיש הומומורפיזם h מ- Q_i ל- Q'_j , כלומר $Q'_j = h(Q_i)$

2016, מאי 9

הרצאה 8

12

הכלה בין (תוצאות של) איחודים

- הגדרה: יהיו T_1 ו- T_2 איחודים של שאליות. נאמר ש- T_1 מכיל את T_2 , סימון $T_1 \geq T_2$, אם לכל מסד D $T_1(D) \geq T_2(D)$
- כלומר, התוצאה של T_1 עבור D מכילה את התוצאה של T_2 עבור D

2016, מאי 9

הרצאה 8

11

הרעיון הכללי של ההוכחה של "רק אם"

אכן $T \geq T'$

קיימת איזומורפיזם $g: T \rightarrow T'$ בין שני האיחודים T ו- T' של שאליות (שהן לאו דווקא חוקי הורן)

2016, מאי 9 8 הרצאה 14

הוכחה

• "אם" – כיוון זה הוא טריוויאלי, כי אם כל שאלית של T' מוכלת באחת השאליות של T , אז לפי ההגדרות $T \geq T'$

• הערה: כיוון זה נכון לכל שני איחודים של שאליות (שהן לאו דווקא חוקי הורן)

2016, מאי 9 8 הרצאה 13

סיום ההוכחה של הכיוון "רק אם"

• הראש המאפיין $g(H'_j)$ שייך לתוצאה של הפעלת Q'_j , ולכן גם לתוצאה של הפעלת T' , על הגוף המאפיין $g(B'_j)$

• בגלל ההכלה $T \geq T'$, נובע ש- $g(H'_j) \in T(g(B'_j))$

• אבל $g(H'_j)$ הוא אטום אחד ששייך לתוצאה של הפעלת T על הגוף המאפיין $g(B'_j)$

• לכן, יש חוק $Q_i \in T$ שמייצר אותו, כלומר $g(H'_j) \in Q_i(g(B'_j))$

• במילים אחרות, Q_i מייצר את הראש המאפיין של Q'_j מהגוף המאפיין של Q'_j

• הראנו שזה תנאי מספיק להכלה $Q_i \geq Q'_j$, כי הוא גורר קיום הומומורפיזם $h: Q_i \rightarrow Q'_j$

2016, מאי 9 8 הרצאה 16

הוכחה של הכיוון "רק אם"

• נתון ש- $T \geq T'$

• יהי Q'_j חוק כלשהו של T'

• צריך להראות שיש ב- T חוק Q_i כך שמתקיים $Q_i \geq Q'_j$

• נסמן את החוק Q'_j ע"י $B'_j: H'_j$

• יהי g מיפוי סימנים קרקעי שמעביר כל משתנה של Q'_j לקבוע ייחודי

• ברור שהחוק Q'_j מייצר את הראש המאפיין $g(H'_j)$ של עצמו מהגוף (קרי, המסד) המאפיין $g(B'_j)$ של עצמו

• המיפוי g מראה זאת

2016, מאי 9 8 הרצאה 15

יחס סדר

נושא זה נחוץ כדי לדון בהכלה בין שאליות עם השוואות

2016, מאי 9 8 הרצאה 18

תרגיל 1

• איך עושים מינימיזציה של איחוד של חוקי הורן?

2016, מאי 9 8 הרצאה 17

יחס סדר מלא

- הגדרה: יחס סדר הינו מלא אם לכל x ו- y ששונים זה מזה, מתקיים אחד משני הדברים הבאים:
 $y < x$ או $x < y$
- שאלה: האם יכולים להתקיים שני הדברים גם יחד?

2016, מאי, 9

הרצאה 8

20

יחס סדר

- הגדרה: יחס סדר, שיסומן ע"י $<$, מוגדר על זוגות של איברים מתחום E ומקיים את שלושת התכונות הבאות
- טרנזיטיביות, כלומר
 $x < y, y < z \Rightarrow x < z$
- זכרו שפסיק מציין את האופרטור הלוגי "וגם"
- אי-רפלקסיביות, כלומר לכל איבר x מתקיים $x \not< x$
- אסימטריות, כלומר אם $x < y$ אז $x \neq y$

2016, מאי, 9

הרצאה 8

19

יחס סדר לא חסום

- הגדרה: יחס סדר אינו חסום מלמעלה אם לכל x קיים z כך ש- $x < z$
- הגדרה: יחס סדר אינו חסום מלמטה אם לכל x קיים y כך ש- $x < y$
- הגדרה: יחס סדר אינו חסום אם הוא אינו חסום מלמעלה וגם אינו חסום מלמטה

2016, מאי, 9

הרצאה 8

22

יחס סדר צפוף

- הגדרה: יחס סדר הינו צפוף אם לכל x ו- y כך ש- $x < y$, קיים z כך ש- $x < z < y$

2016, מאי, 9

הרצאה 8

21

דוגמה

- דוגמה ליחס סדר מלא, צפוף ולא חסום היא יחס הסדר הרגיל מעל המספרים הרציונליים
- כנ"ל לגבי יחס הסדר מעל המספרים הממשיים
- יחס הסדר מעל המספרים הטבעיים הוא מלא, אבל אינו צפוף והוא גם חסום מלמטה
- יחס סדר מעל תחום סופי הוא תמיד חסום וגם אינו צפוף

2016, מאי, 9

הרצאה 8

24

הערה

- ההגדרות מהשקף הקודם מתאימות ליחס סדר מלא
- האם הן מתאימות גם ליחס סדר שאינו מלא? אם לא, כיצד צריך לשנות אותן?

2016, מאי, 9

הרצאה 8

23

בעיית הגרירה עבור יחס סדר

כמובן שכאשר מדברים על בעיית הגרירה, אז הגרירה לא בהכרח מתקיימת – המטרה היא לבדוק האם אומנם יש גרירה

- דוגמה לבעיית הגרירה
 $x < y, 3 < w, w < z \models z < 5$
- הסימן $\models$ מציין גרירה לוגית
- זכרו שפסיק מציין גימום
- $3 < w$ הוא אטום השוואה
- כנ"ל לגבי $x < y$ וכו'
- אפשר להשתמש גם בהשוואות $=, >, \geq, \leq, \neq$
- לדוגמה $x < y, 3 \neq w, w \leq z \models z \geq 5$

2016, מאי, 9
הרצאה 8
26

הנחה חשובה

- אנו מניחים שיחס סדר $<$ המוגדר על תחום E הוא תמיד מלא, צפוף ולא חסום, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת
- בדוגמאות נשתמש ביחס הסדר המוגדר על המספרים הרציונליים

2016, מאי, 9
הרצאה 8
25

הסימון הכללי של בעיית הגרירה עבור יחס סדר

- הסימון הכללי של בעיית הגרירה עבור יחס סדר יכתב בצורה הבאה

$$\Gamma \models \gamma$$

- Γ (קרי, גמא גדולה) מציינת גימום של אטומי השוואות
- γ (קרי, גמא קטנה) מציינת אטום השוואה בודד
- כאמור, הסימן $\models$ מציין גרירה לוגית

2016, מאי, 9
הרצאה 8
28

אטום השוואה

- הגדרה: אטום השוואה הוא מהצורה $s_1 \theta s_2$, כאשר s_1 ו- s_2 הם סימנים ו- θ היא אחת משש ההשוואות $<, >, \leq, \geq, =, \neq$
- זכרו שסימן הוא קבוע או משתנה
- ברור שקבוע חייב להיות מהתחום שעליו מוגדר יחס הסדר
- מינוח: לפעמים נאמר "השוואה" במקום "אטום השוואה"
- הערה: מספיק להניח שיש רק ארבע פעולות השוואה, שהן $<, >, =, \neq$, כי במקום $s_1 > s_2$ אפשר לכתוב $s_2 < s_1$ ובמקום $s_1 \geq s_2$ אפשר לכתוב $s_2 \leq s_1$

2016, מאי, 9
הרצאה 8
27

תרגיל 2

- תנו דוגמה של גרירה שמתקיימת עבור הגדרה אחת של יחס סדר ואינה מתקיימת עבור הגדרה אחרת של יחס סדר
- התשובה יכולה להיות יחסי סדר שהם לא דווקא מלאים, צפופים ולא חסומים, אבל רצוי שהם יקיימו כמה שיותר מתוך שלושת התכונות הללו

2016, מאי, 9
הרצאה 8
30

כיצד נגדיר האם מתקיימת גרירה?

- בעיקרון, אין גרירה אם יש דוגמה נגדית
- האם הגרירה הבאה מתקיימת? אם לא, מהי דוגמה נגדית?

$$x < y, 3 < w, w < z \models z < 5$$

2016, מאי, 9
הרצאה 8
29

הערה

- בדרך כלל נתון תחום E שעליו מוגדר יחס סדר $<$ וצריך לבדוק אם יש דוגמה נגדית עבור E ו- $<$ אלה

2016, מאי 9

הרצאה 8

32

דוגמה נגדית

- הגדרה: דוגמה נגדית לגרירה $\gamma \models \Gamma$ מורכבת מהדברים הבאים:

- תחום E שעליו מוגדר יחס סדר
- מיפוי g מהסימנים של $\Gamma \models \gamma$ אל התחום E , כך שלכל אטום של השוואה $s_1 \theta s_2$ ב- Γ , התמונה $g(s_1) \theta g(s_2)$ מתקיימת על ידי יחס הסדר המוגדר על E , בעוד שהתמונה $g(\gamma)$ אינה מתקיימת על ידי יחס סדר זה

- הערה: זכרו שמיפוי סימנים מקפה כל קבוע לעצמו

2016, מאי 9

הרצאה 8

31

הרחבת גימון של אטומי השוואה
ליחס סדר מלא

- נניח שנתון יחס סדר $<$ שמוגדר מעל תחום E
 - נתונה בעיית הגרירה $\Gamma \models \gamma$
 - יהיו $s_1, \dots, s_n$ הסימנים השונים שמופיעים ב- Γ וב- γ
 - הגדרה: הרחבה של הגימון Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ ו- γ היא סדרה
- $$s_{i_1} \theta_1 s_{i_2} \theta_2 \dots s_{i_{n-1}} \theta_{n-1} s_{i_n}$$
- כאשר $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{n-1}} s_{i_n}$ היא תמורה (פרמוטציה) של סימני Γ ו- γ ,
 - כל θ_i הוא $<$ או $=$,
 - ומתקיימים הדברים הבאים:

2016, מאי 9

הרצאה 8

34

איך מוצאים דוגמה נגדית?

- אם יחס הסדר מוגדר מעל תחום אינסופי, אז יש אינסוף מיפויי סימנים
- השקפים הבאים מראים שלמרות זאת אפשר למצוא דוגמה נגדית (אם היא קיימת) בזמן סופי

2016, מאי 9

הרצאה 8

33

$$s_{i_1} \theta_1 s_{i_2} \theta_2 \dots s_{i_{n-1}} \theta_{n-1} s_{i_n}$$
 חייבת לקיים הדברים הבאים (המשך)

3. אם $s_{ij} = s_{ik}$ היא השוואה מ- Γ , אז $k=j$ (כלומר, s_{ij} ו- s_{ik} הם אותו סימן) או שכל ה- θ_m ($j \leq m \leq k-1$) ביניהם הם $=$
4. אם $s_{ij} \leq s_{ik}$ היא השוואה מ- Γ , אז $k \leq j$
5. אם $s_{ij} \neq s_{ik}$ היא השוואה מ- Γ , אז $k \neq j$ ולפחות אחד מה- θ_m ($j \leq m \leq k-1$) ביניהם הוא $<$

2016, מאי 9

הרצאה 8

36

$$s_{i_1} \theta_1 s_{i_2} \theta_2 \dots s_{i_{n-1}} \theta_{n-1} s_{i_n}$$
 חייבת לקיים הדברים הבאים

1. אם s_{ij} ו- s_{ik} הם שני קבועים שונים (שכמובן חייבים להיות מהתחום E שעליו מוגדר יחס הסדר $<$), כך שלפי יחס הסדר (המוגדר על E) $s_{ij} < s_{ik}$, אז מתקיים ש- $k < j$ ולפחות אחד מה- θ_m ($j \leq m \leq k-1$) ביניהם הוא $<$
2. אם $s_{ij} < s_{ik}$ היא השוואה מ- Γ , אז $k < j$ ולפחות אחד מה- θ_m ($j \leq m \leq k-1$) ביניהם הוא $<$

2016, מאי 9

הרצאה 8

35

דוגמה

• מהי הרחבה של Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ -ו- γ במקרה הבא? האם יש יותר מאחת?

$$x < y, 3 < w, w < z \models z < 5$$

• הערה: יחס הסדר מעל הרציונליים, כי לא נאמר אחרת

$$x < y < 3 < w < z < 5$$

$$x < y < 3 < w < 5 < z$$

2016, מאי 9

הרצאה 8

38

הערה

• סעיפים 2-5 (משני השקפים הקודמים) מגדירים מתי השוואה כשלהי $s_{ij} \theta s_{ik}$ מתקיימת בהרחבה, אפילו אם השוואה זו איננה ב- Γ

2016, מאי 9

הרצאה 8

37

תרגיל 3

• האם תמיד קיימת הרחבה של Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ -ו- γ ?

• ענו על השאלה בהנחה שיחס הסדר מלא, צפוף ולא חסום

2016, מאי 9

הרצאה 8

40

דוגמה נוספת

• מהי הרחבה של Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ -ו- γ במקרה הבא? האם יש יותר מאחת?

$$x < y, 3 \neq w, w < z \models z \geq 5$$

$$x < y = w < 3 < z < 5$$

2016, מאי 9

הרצאה 8

39

תרגיל 4

• הוכיחו את הטענה מהשקף הקודם, כלומר בהינתן יחס סדר $<$ שמוגדר מעל תחום E , יש דוגמה נגדית לגרירה $\Gamma \models \gamma$ אם ורק אם יש הרחבה של Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ -ו- γ , כך שהשוואה γ אינה מתקיימת

• זכרו שאנו מניחים שיחס הסדר הוא מלא, צפוף ולא חסום

• נסו תחילה לתאר את הרעיונות והשלבים העיקריים של ההוכחה

2016, מאי 9

הרצאה 8

42

אפשר לבדוק קיום דוגמה נגדית בזמן סופי

• טענה: בהינתן יחס סדר $<$ שמוגדר מעל תחום E , יש דוגמה נגדית לגרירה $\Gamma \models \gamma$ אם ורק אם יש הרחבה של Γ ליחס סדר מלא על סימני Γ -ו- γ , כך שהשוואה γ אינה מתקיימת

• זכרו שאנו מניחים שיחס הסדר הוא מלא, צפוף ולא חסום

2016, מאי 9

הרצאה 8

41

דרגות הקושי של מציאת אלגוריתם יעיל לפי המקרים השונים

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \models \gamma \\
 < < \\
 < <, \leq \\
 <, \leq = <, \leq, = \\
 <, \leq, =, \neq <, \leq, =, \neq
 \end{array}$$

2016, מאי 9

הרצאה 8

44

תרגיל 5

- מצאו אלגוריתם יעיל לבדיקת גרירה עבור המקרה המיוחד שבו כל פעולות ההשוואה הן $<$
- הכוונה היא לאלגוריתם שעובד עבור כל יחס סדר שהוא מלא, צפוף ולא חסום
- הדבר היחיד שצריך לדעת לגבי יחס הסדר $<$ והתחום E שעליו הוא מוגדר הוא הסדר הנכון בין כל שני קבועים שמוזכרים בבעיית הגרירה
- הוכיחו את נכונות האלגוריתם שמצאתם
- כמו כן, נתחו את זמן הריצה

2016, מאי 9

הרצאה 8

43