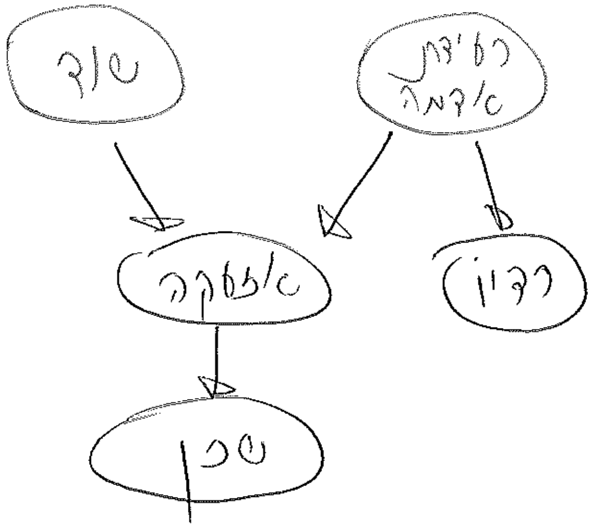
1

מידול הסתברותי ורשתות בייסיאניות



מדוע מידול הסתברותי?

מדוע התפלגות משותפת?

למה זה קשה?

מודלים גרפיים: שפה פורמלית
לתאור התפלגויות משותפות מורכבות

דוגמאות לשימושים:

ראייה ממוחשבת: השלמת תמונה, יצירת תמונות, הורדת רעש...

שפה: חלקי דיבר, תרגום ...

הנדסה: קידוד, אבחון תקלות ...

ביולוגיה: עצים פילוגנטיים, התפשטות מגיפות, ...

מה נלמד?

1. ייצוג
2. הסקה
3. למידה
4. ביצוע פעולות Reinforcement Learning
עם ובלי מודל מפורש.

רשת בייסיאנית

① גרף מכוון א-ציקלי G (DAG)

② התפלגויות מקומיות $p_i(X_i|X_{pa(i)})$ (CPD)

הרשת מגדירה התפלגות

$$P_B(X_1 \ldots X_n) = \prod_i p_i(X_i|X_{pa(i)})$$

משפט: $P_B(X_1 \ldots X_n)$ הי' התפלגות משותפת

הוכחה: נניח סדר טופולוגי

$$P_B(X_1 \ldots X_n) = P(X_1|X_{pa(1)})P(X_2|X_{pa(2)}) \ldots \underbrace{P(X_n|X_{pa(n)})}_{X_n \text{ מופיע רק כאן}}$$

$$\overset{\sum_{X_n}}{\Longrightarrow} P_B(X_1 \ldots X_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} p(X_i|X_{pa(i)}) \underbrace{\sum_{X_n} P(X_n|X_{pa(n)})}_{1}$$

$$\overset{\sum_{X_{n-1}}}{\Longrightarrow} P_B(X_1 \ldots X_{n-2}) = \prod_{i=1}^{n-2} P(X_i|X_{pa(i)}) \underbrace{\sum_{X_{n-1}} P(X_{n-1}|X_{pa(n-1)})}_{1}$$

$\vdots$

$$\Longrightarrow \sum_{X_1 \ldots X_n} P_B(X_1 \ldots X_n) = 1 \quad \square$$

קיבלנו התפלגות חוקית וקומפקטית. האם זה מועיל? מה ההנחות החבויות?

נתחיל מכיוון ההפוך: נניח אי-תלויות ונראה שמתקבל הפירוק. בהמשך נראה שהפירוק גורר גם אי-תלויות

$$X_i \perp X_{ND(i)\setminus pa(i)} \mid X_{pa(i)}$$

<u>הנחה:</u> $X_i \perp X_{ND(i)} \mid X_{pa(i)}$ [קומות אלצבקה]

<u>הגדרה:</u> גרף G נקרא I-map של P אם כל הנחות האי-תלות מתקיימות ב-P.

$I_{LM}(G) \subseteq I(P)$

<u>משפט:</u> אם G הוא I-map של P אזי ניתן לרשום

$$P(X_1,\dots,X_n) = \prod_i P(X_i \mid X_{pa(i)})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \perp Y \mid Z \\ \Rightarrow X \perp Y,Z \mid Z \end{array}}$$

<u>הוכחה:</u> נניח סידור טופולוגי:

$$P(X_1\dots X_n) = \prod_i P(X_i \mid \underbrace{X_1,\dots,X_{i-1}}_{})$$

חוק שרשרת

מכיל את ההורים של X_i וכמו חלק מ-$X_{ND(i)}$ האחרים!

$$= \prod_i P(X_i \mid X_{pa(i)}, \subseteq X_{ND(i)})$$

$X_i \perp \{X_1 \dots X_{i-1}\} - X_{pa(i)}$ בהינתן $X_{pa(i)}$

$$= \prod_i P(X_i \mid X_{pa(i)})$$

(4)

ראינו שאם מניחים הנחות אי-תלות מקבלים פירוק.
אבל תהליך הבנ"ה הוא הפוך: לוקחים התפלגויות לוקליות
והרכבנו אותן. האם זה גורר אי-תלויות?

<u>משפט:</u> אזי P_B מקיים לכל i

$$\textcircled{1}\quad X_i \perp X_{ND(i)} \mid X_{pa(i)} \qquad [\, I_{LM}(G) \,]$$

$$\textcircled{2}\quad P_B(X_i \mid X_{pa(i)}) = P_i(X_i \mid X_{pa(i)})$$

<u>הוכחה:</u> נניח סידור טופולוגי:

$$P_B(X_i, X_{ND(i)}) = \sum_{\substack{\text{ב במשתנים}\\ \text{האחרים}}} P_B(X_1 \ldots X_n)$$

$$= P_i(X_i \mid X_{pa(i)}) \prod_{K \in ND(i)} P_K(X_K \mid X_{pa(K)}) \underbrace{\sum_{\substack{\text{משתנים}\\ \text{אחרים.}}} \prod_{\substack{j \in ch(X)\\ ansc(X)}} P_j(X_j \mid X_{pa(j)})}_{1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}\quad P_B(X_i \mid X_{ND(i)}) = \frac{P_B(X_i, X_{ND(i)})}{\sum_{X_i} P_B(X_i, X_{ND(i)})} = P_i(X_i \mid X_{pa(i)})$$

$$\Rightarrow P_B(X_i, X_{ND(i)\setminus Pa(i)} \mid X_{pa(i)}) = P_i(X_i \mid X_{pa(i)}) \overbrace{P_B(X_{ND(i)\setminus Pa(i)} \mid X_{pa(i)})}^{\text{הכפלה בגורם זה}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}\quad P_B(X_i \mid X_{pa(i)}) = P_i(X_i \mid X_{pa(i)})$$

סכמנו על פני $X_{ND(i)}$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \Rightarrow P_B(X_i \mid X_{ND(i)\setminus Pa(i)}, X_{pa(i)}) = P_B(X_i \mid X_{pa(i)})$$

5

מה יש לנו?

(1) ניתן לקרוא אי תלויות וכך מבטיח שההתפלגות מתפרקת.

(2) ניתן להרכיב התפלגויות קטנות ומתקיימות אי תלויות.

<= רשת בייסיאנית היא "ייצוג קומפקטי" להתפלגות משותפת עם סמנטיקה ברורה.

האם מתקיימות עוד אי-תלויות שלא מגיעים מ-$I_{LM}(G)$?

כן: יש לוגיקה של משפטי אי-תלות.

למשל: $X \perp Y_1, Y_2 | Z \Rightarrow X \perp Y | Z$

נרצה תהליך שיצרה לנו את כל אי-התלויות שנובעות מהגרף.

אינטואיציה: תלות זורמת "בצינורות" על הגרף.

תכף נראה כיצד זה קורה....

הראנו בדוגמה ש: (2) $I_{LM}(G) \subseteq I(P)$ מוגדרת?

מתי לא?

<u>הגדרה:</u> G הוא minimal-I-map של P אם

(1) $I_{LM}(G) \subseteq I(P)$

(2) אם $G' \subset G$ אזי (1) לא מתקיים.

$\boxed{\text{דוגמא}}$

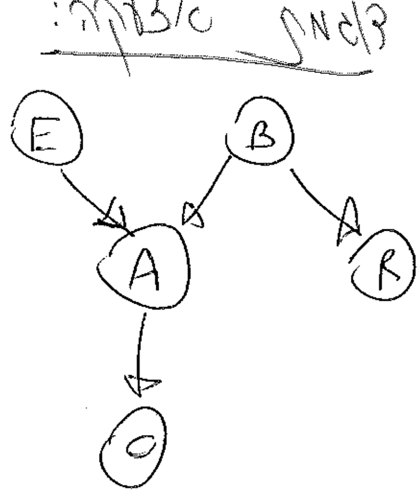
כיצד ניצור I-map שלם?

(1) קובעים סדר $X_1 \ldots X_n$

(2) לכל i: בוחרים Pa_i להיות הקבוצה <u>המינימלית</u> $X_1 \ldots X_{i-1}$ כך שמתקיים

$$X_i \perp X_1 \ldots X_{i-1} \setminus X_{Pa_i} \mid X_{Pa_i}$$

<u>דוגמת אזעקה:</u>



סדר C,R,A,E,B