רשתות מרקוביות

מוטבציה: דוגמת החברים

התפלגות גיבס:

$$P_{\Phi}(X_1 \dots X_n) = \frac{1}{Z} \prod \phi_j (\underbrace{X_{c_j}}_{\text{אוסף משתנים}})$$

גורם נרמול
partition function

פקטור
$Val(X_{c_j}) \to R^+$

רשת מרקובית

- גרף H לא מכוון
- אוסף פקטורים Φ כך שכל X_{c_j} הוא קליקה (לאו דווקא מקסימלית ב- H).

אי-תלויות: Z מפריד בין X ל- Y אם אין שום מסלול פעיל בין X ל- Y בהינתן Z.

$$I(H) = \{(X \perp Y | Z) : sep_H(X;Y|Z)\}$$

חשוב: $Z \subset Z'$ $\quad sep_H(X;Y|Z) \Rightarrow sep_H(X;Y|Z')$

כלומר, בניגוד לרשתות בייסיאניות. מתקיימת מונוטוניות של הפרדה.

משפט: אם P מתפרקת על פי H אז H הוא I-map עבור P.

הוכחה: X,Y,Z הם קבוצות זרות כך ש- $sep_H(X,Y|Z)$.
צ"ל $X \perp Y | Z$ מתקיים ב-P.

מקרה א': $X \cup Y \cup Z = \mathcal{X}$

כל קליקה ב-H מוכלת ב- $X \cup Z$ או $X \cup Y$
אחרת היו קשתות בין X ל-Y. כלומר ניתן לרשום את P:

$$P_\Phi() = \frac{1}{Z} \prod_{\substack{j \\ \text{קליקות} \\ \text{ב-} X \cup Z}} \phi(X_{C_j}) \prod_{\substack{i \\ \text{קליקות} \\ \text{ב-} Y \cup Z}} \phi(X_{C_i}) = \frac{1}{Z} f(X,Z) g(Y,Z)$$

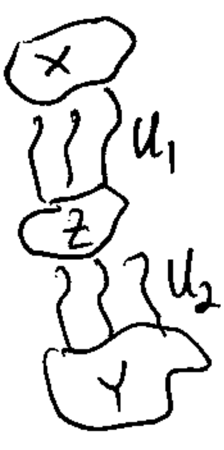
$\Leftarrow$ X ו-Y בת"ל.

מקרה ב': נסמן ב-U את $U = \mathcal{X} - (X \cup Y \cup Z)$

ניתן לחלק את U ל- $U_1 \cup U_2$ כך ש: $sep_H(X,U_1,Y,U_2|Z)$

בעזרת מקרה א' נסיק $P \Rightarrow X,U_1 \perp Y,U_2 | Z$

ובעזרת למת הדקומפוזיציה $P \Rightarrow X \perp Y | Z$



משפט: נתון מבנה H. אם X ו-Y לא מופרדים ע"י Z ב-H, קיימת התפלגות P המפרקת ע"פ H ובה X ו-Y תלויים.

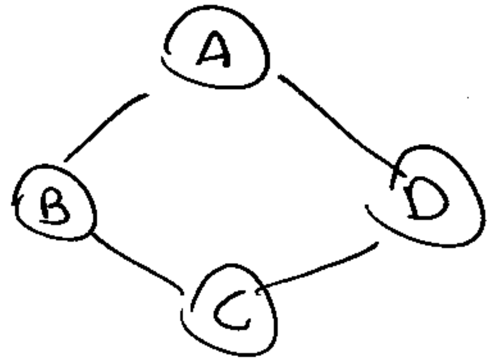
הוכחה: בתרגול

אי-תלויות מסוגים שונים

ברשתות בייסיאניות הוכחנו קשר בין האי-תלויות הלוקליות לבין אלו הגלובליות (d-sep).
ברשתות מרקוביות התחלנו בהתפלגויות ~~[illegible]~~ גלובליות.
האם מתקיים אותו הקשר?

הגדרה: $I_{Pair}(H)=\{(X\perp Y \mid \mathcal{X}-\{X,Y\}) : X-Y\notin H\}$

דוגמא:



הגדרה: $I_{Local}(H)=\{X_i\perp \mathcal{X}-\{X_i\}-X_{Ne(i)} \mid X_{Ne(i)}\}$

במילים: X_i בלתי תלוי בשאר בהינתן השכנים.

קל להראות (תרגיל):

$$P \models I(\mathcal{H}) \Rightarrow P \models I_\ell(\mathcal{H})$$

$$P \models I_\ell(\mathcal{H}) \Rightarrow P \models I_{pair}(\mathcal{H})$$

הכיוון ההפוך עדין נכון ומתק"מ רק אם $0<P(\cdot)$ לכל השמה אפשרית.

משפט: אם P חיובי ומתק"מ $I_{pair}(\mathcal{H})$ אזי מתק"מ $I(\mathcal{H})$

הוכחה: X,Y,Z קבוצות משתנים זרות.
נוכיח באינדוקציה על הגודל של Z (עבור [illegible] צריך I_{pair})

הנחת האינדוקציה: $sep_H(X;Y|Z) \Rightarrow P\models(X\perp Y|Z)$
עבור Z בגודל k ונוכיח עבור $|Z|=k-1$

מקרה א': $\mathcal{X}=X\cup Z\cup Y$
מכיוון ש $|Z|<n-2$ אזי X או Y בגודל שווה או יותר לשניים (או שניהם). בלי הגבלת הכלליות נניח $|X|\ge 2$
ונסמן $V\in X$, $X'=X-\{V\}$.

* מכיוון ש- $sep_H(X;Y|Z)$ אזי גם $sep_H(X';Y|Z)$
* וגם $sep_H(V;Y|Z)$

מונוטוניות מתקיים:

$sep_H(X'; Y \mid Z \cup \{V\})$

$sep_H(V; Y \mid Z \cup X')$

מתכל על הקבוצות המפרידות: $Z \cup \{V\}$ ו- $Z \cup X'$

כל אחת מהן יותר גדולה מ- Z ולכן מתקיימת ההנחה:

כלומר:
$$P \models \begin{array}{l} X' \perp Y \mid Z \cup \{V\} \\ V \perp Y \mid Z \cup X' \end{array}$$

תזכורת: $(X \perp Y \mid Z,W)\ \&\ (X \perp W \mid Z,Y) \Leftarrow X \perp Y,W \mid Z$

מכאן: $X',V \perp Y \mid Z \Longleftrightarrow X \perp Y \mid Z$

מה קורה שההתפלגות אינה חיובית?

נניח X אחיד וגם $Z = Y = X$

א) כל משתנה בת"ל בשני בהינתן השלישי

ב) לפי האלג' צריך זה להתקיים $Z \perp X,Y \mid \emptyset$
אבל בפועל לא קורה.

בצורה דומה ניתן להראות שתכונות האי-תלות הלוקליות
לא גוררות תכונות גלובליות.