1

Markov Blanket

רשתות בייסיאניות - תזכורת.

שאלה: אלו משתנים ($MB(i)$) מפרידים את X_i מהאחרים?

$$X_i \perp \mathcal{X} \setminus \{X_i\} \cup X_{MB(i)} \mid X_{MB(i)}$$

האם מספיקים ההורים?

האם מספיקים ההורים והילדים?

משפט: $MB(i) = X_{pa(i)} \cup X_{ch(i)} \bigcup_{j \in ch(i)} X_{pa(j)}$

במילים: הורים, ילדים ובני זוג (הורים של ילדים)

הוכחה:

$$P(X_i|\mathcal{X}\setminus X_i) = \frac{\prod_j P(X_j|X_{pa(j)})}{\sum_{X_i} \prod_j P(X_j|X_{pa(j)})} = \frac{P(X_i|X_{pa(i)}) \prod_{j \in ch(j)} P(X_j|X_{pa(j)}) \cancel{\prod_{j \in \text{השאר}} P()}}{\cancel{\prod_{j \in \text{השאר}} ()} \sum_{X_i} P(X_i|X_{pa(i)}) \prod_{j \in ch(i)} P(X_j|X_{pa(j)})}$$

$$= g\left(X_i, X_{pa(j)}, \bigcup_{k \in ch(i)} X_{pa(j)}\right) = g\left(X_i, X_{pa(i)}, X_{spouse(i)}\right)$$

* נניח ש-H הוא I-map של P. האם $MB(i)$ יחיד?

לא דווקא, ראינו שניתן לבנות H' I-map מינימלי **שונה**

רשתות מרקוביות - תזכורת

אלו משתנים מפרידים את X מכל השאר אם P חיובי?

$MB(i) = Ne(i)$ כל אי-תלות לוקלית גוררת גלובלית.

האם זה יחיד? איך נבנה H כך שהוא I-map מינימלי?

גישה א': נוסיף קשת בין X ל-Y אם מתקיים ש-
$P \not\models X \perp Y \mid \mathcal{X} \setminus \{X\} \cup \{Y\}$

גישה ב': לכל X נוסיף בתור שכנים את הגבול המינימלי U
שמפריד אותו מהעולם.

משפט: נבנה את H על פי גישה א'. אזי H הוא I-map
מינימלי יחיד עבור P.

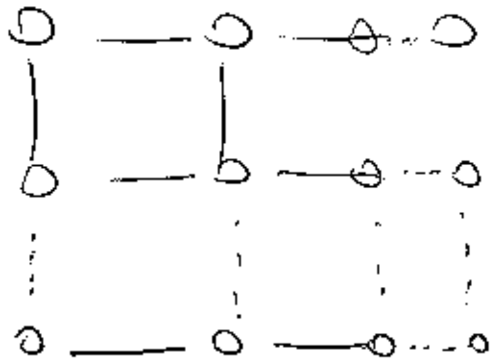
הוכחה: H הוא I-map כי על פי בנ"ה מתקיים $I_{pair}(H) \subseteq I$
ומתוך חיוביות P מתקיים גם $I(H)$
נניח בשלילה כי קיימת קשת Y-X שניתן להוריד.
אם אז מהגדרת נובע $X \perp Y \mid \mathcal{X} - \{X, Y\}$ ואנחנו יודעים
שזה לא מתקיים אחרת לא היינו מוסיפים את הקשת.
בדומה, כל H' אחר שהוא I-map חייב לכלול את
כל הקשתות הללו ולכן H הוא מינימלי ויחיד.

ייצוג של רשתות מרקוביות

$$P(X) \propto \prod_c \phi(X_c) = \exp\Big\{\sum_c \underbrace{\log \phi_c(X_c)}_{-e_c(X_c)}\Big\}$$

- ראינו בתרגול ייצוג של Factor Graph

- דוגמא: סגמנטציה:



$X_i \in \{$תיוגים אפשריים$\}$

$e_c(X_i) =$ פונקציה שמודדת מחלקה על פי צבע פיקסל

$$e(X_i, X_j) = \begin{cases} \alpha & X_i = X_j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

איך נייצג זאת בצורה קומפקטית?

נגדיר $f_{ij} = 1(X_i = X_j)$ ונקבל:

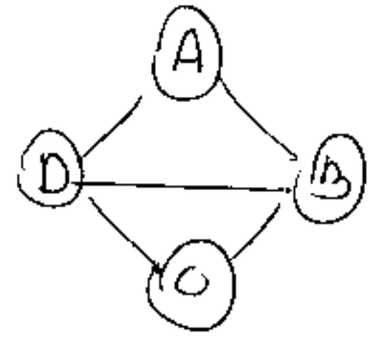
$$P(X) \propto \exp\Big\{\sum_i e(X_i) + \sum_{i,j} w_{ij} f_{ij}\Big\}$$

ובאופן כללי יותר:

$$P(X) \propto \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(D_i)$$

עבור D_i קליקות בגרף.

רפרמטריזציה קנונית של P חיובי



הרפרמטריזציה הקנונית תכלול אברי אנרגיה:

$f(A,B,D)$
$f(B,C,D)$
$f(A,B), f(B,C), f(C,D), f(D,A)$
$f(A), f(B), f(C), f(D)$

זוהי over-parametrization (כמו MRF באופן כללי) אבל שמאפשרת לנו לתת ייצוג יחיד מהינתן פונקציית אנרגיה שבעזרתו נוכיח את משפט Hammersley-Clifford

הייצוג הקנוני הוא יחסית להשמה בסיס $(x_1^*, \dots, x_n^*)$
בה"כ נבחר $x_i^*=0$ לצורך נוחות הסימון.

(5)

משפט: נניח P התפלגות חיובית מעל $\mathcal{X}$.
אם H הוא I-map של P אזי P מתפרקת לפי H.

[תזכורת: הוכחנו כיוון הפוך]

הוכחה: לכל תת קבוצה של משתנים S נגדיר

$$f_S(X_S=x_S) = \prod_{Z\subseteq S} P(X_Z=x_Z,\ 0)^{-1^{|S|-|Z|}}$$

שאר

[דוגמא] נניח שיש לנו 3 משתנים בסך הכל שהם X,Y,Z אזי:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot P(x,y,0)^{-1}\cdot P(x,0,z)^{-1}\cdot P(0,y,z)^{-1}\cdot P(x,0,0)\cdot P(0,y,0)\cdot P(0,0,z)\cdot P(0,0,0)^{-1}$$

נראה:

$$(1)\quad \prod_{S\subseteq \mathcal{X}} f_S(X_S) = P(\mathcal{X})$$

$$(2)\quad f_S(X_S) = 1$$ אם S הוא לא קליקה

הוכחת 1: המטרה להראות שכל הביטויים ב- $\prod_{S\subseteq\mathcal{X}} f_S(X_S)$ מתבטלים מלבד $P(\mathcal{X})$

ניקח $Z\subseteq\mathcal{X}$ מסוים ונסתכל על $g \equiv P(X_Z, X_{\mathcal{X}\setminus Z}=0)$

(א) הלבר מופיע ב- $f_Z(X_Z)$ בצורה $g^{-1^0} = g$ (6)

(ב) הוא מופיע בפונקציות של קבוצות שמכילות את Z ועוד משתנה אחד. יש כאלה: $\binom{|X|-|Z|}{1}$ וזה מופיע שם בצורת g^{-1}.

(ג) הוא מופיע בפונקציות של קבוצות שמכילות את Z ועוד שני משתנים. יש כאלה $\binom{|X|-|Z|}{2}$ וזה מופיע בצורת $g^{-1^2} = g$

$\vdots$

כלומר: יש הסימן חיובי בחזקה.... $\binom{k}{0}+\binom{k}{2}+$ כאשר $k=|X|-|Z|$

והסימן שלילי $\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+$ מלבד המקרה $|Z|=|X|$

$$\boxed{\text{תזכורת: } (a+b)^k=\sum\binom{k}{i}a^ib^{k-i} \Rightarrow (1-1)^k = \binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\dots(-1)^k\binom{k}{k}}$$

ולכן כל האברים מתבטלים מלבד $f_X(X)$ שעל פי הגדרה שווה ל- $P(X)$

הוכחת 2: נניח S לא קליקה. אזי קיימים $a,b\in S$ שלא מחוברים. נסתכל על כל תתי הקבוצות Z ב-S ואלה תתי הקבוצות W ב-$S\setminus\{a,b\}$

כל Z הוא מהצורה: (1) $Z=W$

או (2) $Z=W\cup\{a\}$

או (3) $Z=W\cup\{b\}$

(4) $Z=W\cup\{a,b\}$

(7)

כלומר:

$$f_S(X_S) = \prod_{Z \subseteq S} P(X_Z, 0)^{-1^{|S|-|Z|}}$$

בחזקת סימן -

$$= \prod_{W \subseteq S \setminus \{a,b\}} \left[\frac{P(X_W, X_{X \setminus W} = 0) \, P(X_{W \cup \{a,b\}}, 0)}{P(X_{W \cup \{a\}}, 0) \, P(X_{W \cup \{b\}}, 0)} \right]^{-}$$

נראה שהם מבטלים אחד את השני:

$$\frac{P(X_W, 0)}{P(X_{W \cup \{a\}}, 0)} = \frac{P(X_a = 0 \mid X_b = 0, X_W, 0) \, P(X_b = 0, X_W, 0)}{P(X_a \mid X_b = 0, X_W, 0) \, P(X_b = 0, X_W, 0)}$$

לא תלוי כי אין קשר בין X_a ו-X_b.

$$= \frac{P(X_a = 0 \mid X_b, X_W, 0) \, P(X_b = 0, X_W, 0)}{P(X_a \mid X_b, X_W, 0) \, P(X_b = 0, X_W, 0)}$$

$$= \frac{P(X_a = 0 \mid X_b, X_W, 0) \, P(X_b, X_W, 0)}{P(X_a \mid X_b, X_W, 0) \, P(X_b, X_W, 0)}$$

$$= \frac{P(X_{W \cup \{b\}}, 0)}{P(X_{W \cup \{a,b\}}, 0)}$$

$$\Leftarrow f_S(X_S) = 1$$