

## קורס 67800 תש"ע בחינה מועד א'

הנחיות:

- בבחינה חמש שאלות. עליכם לענות על שלוש מתוכן (משקל כל שאלה 33 נקודות).
- לא ייבדקו יותר משלוש שאלות כך שאם פתרתם שאלות נוספות עליכם לבחור אילו שאלות ייבדקו ולסמן זאת בצורה ברורה.
- עליכם לנמק היטב כל תשובה ולהוכיח באופן מדויק כל טענה שנדרשתם להוכיח. תשובה נכונה ללא נימוק ו/או דרך לא תזכה אתכם בנקודות.
- עליכם לענות על כל השאלות הבאות באופן עצמאי. תלמיד שיתפס מעתיק, או שיהיה קיים חשש כי העתיק יועבר לטיפול רשויות האוניברסיטה.
- אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא.
- (1 נקודות) ודאו כי מספר הזהות שלכם רשום על כל דפי הבחינה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי

בהצלחה !

1. בשאלה זו נבחן שני אלגוריתמים "אגרסיביים" ללמידת מבנה. באלגוריתם הראשון, אנו מתחילים ברשת הריקה ובכל שלב  $i$  מוסיפים ל- $X_i$  את אוסף הילדים האופטימלי: אוסף הילדים שמביא למקסימום את ציון ה-BIC ואינו יוצר מעגלים. האלגוריתם השני זהה אלא שבכל שלב אנו מוסיפים ל- $X_i$  את אוסף ההורים האידיאלי.

א. (14 נקודות) הראו כיצד ניתן לבצע כל שלב באלגוריתם הילדים האופטימלי בצורה יעילה.

ב. (10 נקודות) בהנחה שכל המשתנים הם בינאריים, מה סדר הגודל של מספר הפעולות המקסימלי שיידרש בשלב הוספת הילדים עבור  $X_5$ ?

ג. (9 נקודות) הסבירו מדוע לא ניתן לבצע את אלגוריתם ההורים האידיאליים ביעילות דומה.

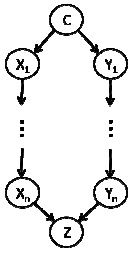
2. בשאלה זו נבחן שימוש ברשת מרקובית לביצוע הפרדה של אובייקט מהרקע (סגמנטציה). לכל פיקסל נשייך משתנה בינארי עבורו ערך 1 יציין שייכות הפיקסל לאובייקט וערך 0 לרקע. נגדיר פקטורים על פני פיקסלים שכנים כך ש- $\phi(X_i, X_j) = \alpha_{i,j}$  אם שני הפיקסלים מקבלים את אותו הערך ו-1 אחרת. עבור מודל זה נגדיר גרף צברים (cliques) בו קיים צבר לכל פקטור ולכל משתנה, וכל צבר התואם לפקטור מחובר בקשת לצברים של המשתנים המופיעים בפקטור.

א. (10 נקודות) בהנחה שאין במודל פקטורים נוספים ושכל ההודעות מאותחלות להיות אחידות. חשבו את ההודעה הראשונה הנשלחת על אלגוריתם Loopy Belief Propagation (LBP) ממשתנה לאחד משכניו. מה הבעיה?

ב. (12 נקודות) מה ההתפלגות השולית המדויקת של משתנה  $X_i$ ? הוכיחו. מה מסקנותיכם כעת לגבי ביצועיו של LBP?

ג. (6 נקודות) כעת נוסיף למודל פקטורים בינאריים (לא אחידים) לכל פיקסל בנפרד המגדירים (למשל על סמך צבע הפיקסל) את העדפת הפיקסל להיות חלק מהאובייקט או הרקע. חיזרו על חישוב ההודעה מ-(א). האם נפתרה הבעיה?

ד. (5 נקודות) בהסתמך על (ג), באופן איכותי, איזה סגמנטציה הייתם מצפים לקבל באזור של פיקסל עבורו ערך אחד של הפקטור הבינארי גדול משמעותית מהאחר? הניחו  $\alpha_{i,j} < 1$ .



3. א. (10 נקודות) עבור רשת בייסיאנית שכולה לולאה לא מכוונת אחת (ראה ציור), מהו רוחב העץ (Treewidth)? מה מספר הפעולות הנדרשות על מנת לחשב את  $P(Z)$  ברשת זו? הניחו שלכל אחד מהמשתנים יש שני ערכים אפשריים.

ב. (18 נקודות) נניח וברשותנו רשת  $G$  לא מכוונת כללית עם רוחב עץ  $K$ . הוכיחו שהוספת קשת כלשהי ל- $G$  תעלה את רוחב העץ לכל היותר ל- $K+1$ . רמז: חישובו אילו שינויים נדרשים כדי להפוך עץ קליקות של הרשת המקורית לעץ קליקות של הרשת עם הקשת החדשה.

ג. (5 נקודות) חזרו על (ב) עבור רשת מכוונת.

4. א. (10 נק') בהינתן משתנים מקריים  $X, Y, W, Z$  הראו שמתקיימת התכונה הבאה:  
 $X \perp Y, W | Z \Rightarrow X \perp Y | Z, W$

ב. (18 נק') עבור גרף לא מכוון  $G$  הראו שאם פילוג מקיים את תכונת חוסר התלות  $I_{LM}(G)$  אזי הוא מקיים את התכונות ב  $I_{pair}(G)$ .

ג. (5 נק') תחת אילו תנאים מתקיים ההיפך (כלומר  $I_{pair}(G)$  גורר  $I_{LM}(G)$ )? אין צורך להוכיח.

5. נתייחס למודל Naïve Bayes כאשר משתנה המחלקה  $C$  אינו נצפה ויש לכם מדגם בגודל  $M$  של המשתנים  $X_1, \dots, X_n$  (נסמן ב  $X_i^{(m)}$  את המשתנה ה- $i$  בדגימה ה- $m$ ). אתם מעוניינים ללמוד את הפרמטרים של המודל, כאשר הפרמטריזציה מלאה,

כלומר  $p(x_1, \dots, x_n, c; \theta) = \theta_c(c) \prod_{i=1}^n \theta_i(x_i | c)$  (תחת האילוצים הרגילים עבור הפרמטרים).

א. (8 נקודות) כתבו את כלל העדכון של אלגוריתם EM עבור כל הפרמטרים. לא חייבים להוכיח.

ב. (12 נקודות) הניחו ש EM מאותחל עם פרמטרים שהם פילוגים אחידים. מה יהיו הפרמטרים אחרי צעד אחד? מהי הבעיה שמתגלה?

ג. (13 נקודות) כעת נניח שהמודל נתון באופן לא מכוון עם הפרמטריזציה הבאה:

$p(x_1, \dots, x_n, c; \theta) = \frac{1}{Z(\theta)} e^{\theta_c(c) + \sum_{i=1}^n \theta_i(x_i, c)}$  (ללא אילוצים על הפרמטרים). נניח שיש לכם

$M$  דגימות הכוללות את כל המשתנים (כולל  $C$ ). מהם הפרמטרים הממקסמים את הנראות?