

קורס 67800 תשע"ד

בחינה מועד א'

הנחיות:

- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על שלוש מתוכן (משקל כל שאלה 33 נקודות).
- לא ייבדקו יותר משלוש שאלות כך שאם פתרתם שאלות נוספות עליכם לבחור אילו שאלות ייבדקו ולסמן זאת בצורה ברורה.
- עליכם לנמק היטב כל תשובה ולהוכיח באופן מדויק כל טענה שנדרשתם להוכיח. תשובה נכונה ללא נימוק ו/או דרך לא תזכה אתכם בנקודות.
- עליכם לענות על כל השאלות הבאות באופן עצמאי. תלמיד שיתפס מעתיק, או שיהיה קיים חשש כי העתיק יועבר לטיפול רשויות האוניברסיטה.
- אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא.
- (1 נקודות) ודאו כי מספר הזהות שלכם רשום על מחברת הבחינה.

משך הבחינה: שלוש שעות

בהצלחה !

שאלה 1: ייצוג

אוסף צמתים Z בגרף מכוון G יקרא מוכל עצמית אם עבור כל שני צמתים A, B השייכים ל Z , כל הצמתים בכל מסלול מכוון בין A ל- B שייכים גם הם ל Z .

נתון אוסף צמתים Z . נסמן ב Y את אוסף ההורים של כל הצמתים ב Z שאינם עצמם ב Z . נסמן ב U את אוסף כל האבות הקדמונים (ancestors) של צמתים ב Z שאינם ב Z או ב Y .

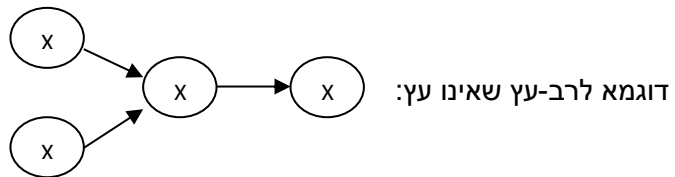
א. (11 נקודות) הוכיחו בעזרת תכונות d-separation שאם Z הוא מוכל עצמית אז $\text{Ind}(Z; U|Y)$

ב. (11 נקודות) הוכיחו או הפריכו: הטענה מתקיימת גם אם Z אינו מוכל עצמית

ג. (11 נקודות) בגרף לא מכוון, אוסף צמתים Z יקרא מוכל עצמית אם עבור כל שני צמתים A, B השייכים ל Z , כל הצמתים בכל מסלול בין A ל- B שייכים גם הם ל Z . נסמן ב- Y את אוסף השכנים של כל הצמתים ב Z שהם עצמם לא ב Z . נסמן ב U את כל הצמתים שאינם ב Z או Y . חזרו על סעיף ב' עבור מקרה זה.

שאלה 2: הסקה מדויקת

רב-עץ (polytree) היא רשת מכוונת G ללא מעגלים כלל אך כאשר ייתכן שלמשתנה יהיה יותר מהורה אחד (ראו ציור להמחשה).



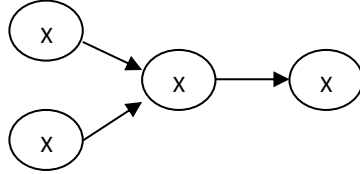
א. (8 נקודות) הסבירו מדוע הסקה במודל זה קשה יותר מהסקה בעץ.

ב. (10 נקודות) הציעו סדר אלימינציה אופטימלי עבור רב-עץ. הוכיחו שהוא אכן אופטימלי וציינו מהו רוחב העץ.

ג. (15 נקודות) נניח כעת כי כל משתנה הוא בינארי (ערכים 0 ו 1) וכי ייצוג ה CPD של כל משתנה בהינתן הוריו הוא Noisy-or, כלומר, $P(X_i = 0 | X_{\text{par}(i)}) = \lambda_{i,0} \prod_{j \in \text{par}(i)} \lambda_{i,j}^{X_j}$, עבור פרמטרים $\lambda_{i,j}$ נתונים. הראו בצורה מפורטת שבמקרה זה ניתן לבצע הסקה (למשל חישוב $P(x_i)$) בסיבוכיות ליניארית במספר ההורים המקסימלי. כיצד תשובתכם מסתדרת עם רוחב העץ של סעיף ב'?

שאלה 3: למידת פרמטרים ומבנה

נתון הגרף המכוון בצירור ורשת בייסיאנית עליו.



א. (11 נקודות) הניחו את הפרמטריזציה הבא עבור $p(x_3|x_1, x_2)$:

$$p(x_3 = 1|x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha & x_1 + x_2 = 0 \\ \beta & x_1 + x_2 = 1 \\ \gamma & x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

חשבו את אומד ML עבור הפרמטרים הללו, כפונקציה של הפילוג האמפירי.

ב. (11 נקודות) הניחו פרמטריזציה מלאה להתפלגות. כמו כן הניחו שהמשתנה X_3 אינו נצפה, ושאר המשתנים כן. כתבו את כלל העדכון של אלגוריתם EM עבור הפרמטרים $\theta_4(x_4|x_3)$. הסבירו בדיוק אילו חישובים יש לבצע.

ג. (11 נקודות) מייצרים M דגימות IID מרשת בייסיאנית כזו, ומריצים אלגוריתם Chow-Liu על הנתונים הללו. אילו קשתות עשויות להופיע בעץ המתקבל? כיצד התשובה משתנה כאשר M שואף לאינסוף? (ניתן להשתמש בעובדה שאם X ו- Y הם בלתי תלויים בהינתן Z אזי מתקיים $I(X; Y) \leq \min \{I(X; Z), I(Y; Z)\}$.)

שאלה 4: הסקה מקורבת

א. (11 נקודות) הראו ששיטת normalized importance sampling מוטה. כלומר, הראו שתוחלת האומד של השיטה לא בהכרח שווה לערך שאנו מנסים לאמוד (תוחלת הפונקציה על פי ההתפלגות P).

ב. (11 נקודות) הראו שלכל מודל לא מכוון עם פקטורים על זוגות E מתקיים לכל אוסף פילוגים $q_i(x_i)$ שפונקציית החלוקה של המודל מקיימת:

$$\log Z(\theta) \geq - \sum_{ij \in E} \theta_{ij}(x_i, x_j) q_i(x_i) q_j(x_j) + \sum q_i(x_i) \log(q_i(x_i))$$

(רמז: חישובו על קירוב Mean Field).

ג. (11 נקודות) נתון מודל גרפי על n משתנים בינאריים (ערכים 0 או 1 לכל משתנה) כאשר אחד הפקטורים מוגדר: $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i = 0.5n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. כעת רוצים לממש באלגוריתמים

Loopy **Max Product** עבור מודל זה, כאשר הצבר המתאים ל $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ שולח הודעות ל n צברים אשר כל אחד מהם מכיל את המשתנה X_i . לצורך שאלה זו נניח כי ניתן להתעלם מצברים/הודעות נוספות שברשת. הסבירו כיצד ניתן לחשב את ההודעות הנ"ל הודעות אלו ביעילות (כלומר בזמן פולינומיאלי ב n)? רמז: השתמשו בכך שניתן למיין באופן יעיל.