ת.ז. ____________________ תאריך: 11/04/2014

קורס 67800 תשע"ד

בחינה מועד ב'

הנחיות:

- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על שלוש מתוכן.
- משקל כל שאלה 33 נקודות ומשקל כל סעיף 11 נקודות.
- לא ייבדקו יותר משלוש שאלות כך שאם פתרתם שאלות נוספות עליכם לבחור אילו שאלות ייבדקו ולסמן זאת בצורה ברורה.
- עליכם לנמק היטב כל תשובה ולהוכיח באופן מדויק כל טענה שנדרשתם להוכיח. תשובה נכונה ללא נימוק ו/או דרך לא תזכה אתכם בנקודות.
- עליכם לענות על כל השאלות הבאות באופן עצמאי. תלמיד שיתפס מעתיק, או שיהיה קיים חשש כי העתיק יועבר לטיפול רשויות האוניברסיטה.
- אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא.
- (1 נקודות) ודאו כי מספר הזהות שלכם רשום על מחברת הבחינה.

משך הבחינה: שלוש שעות

בהצלחה !

<u>שאלה1 : ייצוג</u>

נתונה התפלגות חיובית $P_B(X) = \prod_i P_B(X_i \mid X_{par_i})$ המוגדרת על ידי רשת בייסיאנית.

א. נניח של P_B מבנה של עץ, ובמקום $P_B(X_i \mid X_{par_i})$ לכל משתנה, יש לנו גישה רק להתפלגויות השוליות $P_B(X_i, X_{par_i})$ וגם $P_B(X_i)$. האם ניתן לייצג את $P_B(X)$ כמכפלה/חלוקה של גורמים אלו בלבד? הוכיחו את נכונות תשובתכם.

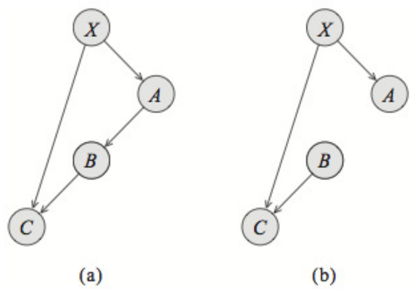
ב. נניח ששוב קיבלנו את ההתפלגויות השוליות $P_B(X_i, X_{par_i})$ וגם $P_B(X_i)$ אבל כעת לרשת המקורית אין מבנה של עץ. האם ניתן לייצג את $P_B(X)$ כמכפלה/חלוקה של גורמים אלו בלבד? נמקו היטב.

ג. יהי T_1 עץ מכוון ויהיה T_2 עץ המתקבל מ T_1 על ידי הסרת הכיוון של הקשתות (השלד של T_1). הוכיחו שמתקיים $I_{d-sep}(T_1) = I_{sep}(T_2)$

<u>שאלה 2: הסקה מדויקת</u>

נתונה רשת בייסיאנית $P_B(X) = \prod_i P_B(X_i \mid X_{par_i})$. בשאלה זו נבחן את הסמנטיקה של פקטורים בתהליך Variable Elimination (VE)

א. תהי P_B רשת המתוארת על ידי (a) בציור הבא ו- $P_{B'}$ רשת המתוארת על ידי (b)



נסתכל על הפקטור הנוצר אם מבצעים אלימינציה ל-X: $\phi(A,B,C) = \sum_x P(X)P(A|X)P(C|B,X)$.
שימו לב שהפקטור אינו שווה לשום התפלגות מותנית בP_B. תארו פרמטריזציה של $P_{B'}$ כך שהפקטור שהגדרנו שווה בדיוק ל $P_{B'}(A,C|B)$

ב. בסעיף זה נוכיח כי (א) מתקיים באופן כללי. נגדיר $\phi(W) = \prod_{i \in I} P_B(X_i \mid X_{par_i})$ כאשר I הוא אוסף אינדקסים (לצורך הנוחות ניתן להניח $I = \{1, \dots, k\}$). W הוא אוסף כל המשתנים המופיעים בפקטורים שמוכפלים. הראו ש $\phi(W)$ הוא התפלגות מותנית ברשת אחרת השונה מהרשת המקורית.
רמז: חלקו את W לשתי קבוצות זרות Z ו Y ובנו רשת $P_{B'}$ בה הפקטור שווה ל $P_{B'}(Y|Z)$.

ג. הוכיח שכל גורם ביניים המתקבל לאחר אלימינציה (סכימה) של משתנה בתהליך VE עבור P_B הוא התפלגות מותנית ברשת כלשהיא $P_{B'}$ (הרשת שונה לגורמי ביניים שונים).
רמז: השתמשו בסעיף (ב) ובדקו לאיזה קבוצת משתנים שייכים המשתנים הנסכמים.

<u>שאלה 3: למידת פרמטרים ומבנה</u>

יהי $\mathcal{H}$ משפחת הגרפים הלא מכוונים בהם לכל קודקוד יש <u>בדיוק</u> שכן אחד. אנו נתמקד בפילוגים שהם רשת מרקובית עם מבנה $H \in \mathcal{H}$. נניח פרמטריזציה מלאה: $p(x;\theta) \propto e^{\sum_{ij\in \overline{H}} \theta_{ij}(x_i,x_j)}$.

א. הראו שפונקציית החלוקה של המודל ניתנת לחישוב יעיל. חשבו אותה עבור $\theta_{ij}\ (x_i,x_j) = 1$ כאשר לכל אחד מהמשתנים יש שני ערכים אפשריים.

ב. דוגמים M דוגמאות IID מתוך פילוג p כמתואר בשאלה. נסמן ב$p_D(x)$ את הפילוג האמפירי המחושב מתוך המדגם זה. הניחו שהמבנה H **ידוע**. חשבו במפורש את פרמטר הנראות המירבית $\theta_{ij}\ (x_i,x_j)$ כפונקציה של הפילוגים השוליים $p_D(x_i,x_j)$ עבור הקשתות של H.

ג. בהנתן אוסף משקלות אי שליליות w_{ij} על הקשתות של גרף מלא, נגדיר פרוצדורה *A(w)* כך: *A(w)* מוצאת את הגרף $H \in \mathcal{H}$ כך ש $\sum_{ij\in H} w_{ij}$ מקסימלי. נתון ש *A(w)* ניתנת לביצוע בזמן פולינומיאלי. כעת נניח שהמבנה H **אינו ידוע**, ואתם רוצים למקסם את הנראות על פני הפרמטרים והמבנים ב $\mathcal{H}$. הראו שניתן לעשות זאת הזמן פולינומיאלי בעזרת *A(w)* .

<u>שאלה 4: הסקה מקורבת</u>

א. תארו את שיטת Gibbs Sampling ותארו מקרה שבו היא לא תתכנס להתפלגות הנכונה. הסבירו כיצד ניתן להתגבר על הבעיה בעזרת דגימה של יותר ממשתנה אחד בכל צעד.

ב. הראו שעבור רשת מרקובית pairwise עם פרמטרים θ ניתן לבטא את פונקצית החלוקה כך:

$$\log(Z) = \max_{q\in\Delta} \sum_{ij} \theta_{ij}\left(x_i,x_j\right) q(x_i,x_j) - \sum_{x} q(x)\log(q(x))$$

כאשר Δ היא קבוצת כל הפילוגים החוקיים $q\ (x_1,\ldots,x_n)$

(רמז: ניתן להשתמש בעובדה שמרחק KL הוא 0 רק עבור התפלגויות שוות).

ג. נתונה רשת מרקובית עם שלושה משתנים בינאריים המוגדרת:

$$p(x_1,x_2,x_3) \propto \prod_{ij} \varphi\left(x_i,x_j\right)$$

. על כל הקשתות יש פרמטר $\varphi_{ij}\left(x_i,x_j\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ ו A ו B חיוביים ובעלי אותו ערך לכל הקשתות. מריצים Loopy BP על המודל הנ"ל עם הודעות התחלתיות אחידות. הניחו שההודעות מחושבות אחת בכל פעם לפי סדר הקשתות על המעגל. כלומר, בתחילה מועברת הודעה מהצבר x_1,x_2 לצבר x_2,x_3, משם לצבר x_3,x_1, משם לצבר x_1,x_2 וחוזר חלילה.

מה תהיה ההתפלגות השולית שיחשב האלגוריתם כאשר מספר האיטרציות שואף לאינסוף? תנו תשובה מספרית. והסבירו כיצד היא משתנה אם A גדול מ B או להיפך. חשבו גם את הפילוג השולי המדויק. האם BP נותן תשובה נכונה?