

**קורס 67800 תשע"ח**  
**שיטות הסתברותיות בבינה מלאכותית**  
**בחינה מועד א', 3/7/2018**

הנחיות:

- בבחינה חמש שאלות. עליכם לענות על שלוש מתוכן (משקל כל שאלה 33 נקודות).
- לא תבדקנה יותר משלוש שאלות, כך שאם פתרתם שאלות נוספות עליכם לבחור אילו שאלות ייבדקו ולסמן זאת בצורה ברורה.
- עליכם לנמק היטב כל תשובה ולהוכיח באופן מדויק כל טענה שנדרשתם להוכיח. תשובה נכונה ללא נימוק ו/או דרך לא תזכה אתכם בנקודות.
- עליכם לענות על כל השאלות הבאות באופן עצמאי. תלמיד שייתפס מעתיק, או שיהיה קיים חשש כי העתיק יועבר לטיפול רשויות האוניברסיטה.
- אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא.
- (1 נקודות) ודאו כי מספר הזהות שלכם רשום על מחברת הבחינה.

משך הבחינה: שלוש שעות

בהצלחה !

שאלה 1:

שאלה זו עוסקת באוסף אי-התלויות  $I(H)$  המיוצגות על ידי רשת מרקובית.

א. (10 נקודות) הוכיחו שאוסף אי-התלויות מקיים את תכונת האיחוד הבאה:

$$X \perp Y|Z \Rightarrow X \perp Y|Z, W$$

עבור כל קבוצות משתנים  $X, Y, Z, W$ .

ב. (15 נקודות) הוכיחו שאוסף האי-תלויות מקיים את תכונת הטרנזיטיביות:

$$\neg(X \perp A|Z) \text{ and } \neg(Y \perp A|Z) \Rightarrow \neg(X \perp Y|Z)$$

עבור כל קבוצות משתנים  $X, Y, Z$  ומשתנה בודד  $A$ .

במילים, אם יש תלות מסוימת בין  $A$  ל- $X$  בהינתן  $Z$  וכנ"ל לגבי  $Y$ , אז גם  $X$  ו- $Y$  הם לא בלתי תלויים בהינתן  $Z$ . לחלופין, אם  $X$  בלתי תלוי ב- $Y$  בהינתן  $Z$  אז או ש- $X$  בלתי תלוי ב- $A$  בהינתן  $Z$  או ש- $Y$  בלתי תלוי ב- $A$  בהינתן  $Z$ .

ג. (8 נקודות) האם תכונה (ב) נכונה גם עבור רשת מכוונת? מספיק לנמק היטב במילים ואין צורך להוכיח פורמלית.

שאלה 2:

בשאלה זו נעסוק באלגוריתם העברת הודעות על עץ קליקות. להזכירכם, בכיתה ראינו שלאחר ששלחנו את כל ההודעות והעץ הוא calibrated, אזי מתקיים ש- $b_i$ , ה-belief מעל לקליקה  $i$ , שווה להפלגות השולית של המשתנים המופיעים באותה קליקה.

א) (10 נקודות) נסמן ב  $\mu_{ij} = m_{i \rightarrow j} m_{j \rightarrow i}$  את מכפלת שתי ההודעות משני כיווני כל קשת בעץ הקליקות (ההודעה מקליקה  $i$  לקליקה  $j$  וההודעה בכיוון ההפוך). הוכיחו שלאחר קליברציה,  $\mu_{ij}$  שווה להתפלגות השולית של המשתנים שבחיתוך של שתי הקליקות  $i$  ו- $j$ .

ב) (15 נקודות) הוכיחו שמכפלת כל ה-beliefs מעל הקליקות  $b_i$ , מחולקת במכפלת כל ה- $\mu_{ij}$  שווה להתפלגות המשותפת כולה, לאורך כל אלגוריתם ה-sum product, גם לפני שהעץ הוא calibrated. כלומר, גם כאשר רק חלק מההודעות חושבו.

ג) (8 נקודות) האם התכונה של (ב) מתקיימת עבור אלגוריתם sum product ב-cluster graph כללי? נמקו את תשובתכם היטב, אך אין צורך להוכיח פורמלית.

### שאלה 3:

נניח כי אנו במצב בו אנו מעוניינים בהתפלגות  $P(X)$  שאיננו יכולים לחשבה או לדגום ממנה. בידינו  $P'(X) \propto P(X)$  אשר אנו יכולים לחשב אותה עבור כל ערך של  $X$ , אך איננו יכולים לדגום ממנה. כמו כן בידינו  $Q(X)$  אשר ניתנת לחישוב לכל ערך של  $X$  ואשר ניתן לדגום ממנה.

א. (13 נקודות) הסבירו כיצד ניתן להשתמש ב- $Q(X)$  על מנת לחשב את  $P(X=x)$  בשיטת ה-Normalized Importance Sampling והוכיחו את נכונות השיטה.

ב. (8 נקודות) נניח כעת כי אנו מגדירים תהליך מרקובי על ידי מטריצת המעברים הבאה:

$$w(x) = P'(x)/Q(x) \text{ , כאשר } T(x \rightarrow x') = Q(x') \min \left[ 1, \frac{w(x')}{w(x)} \right] \text{ , וכמו כן,}$$

$$T(x \rightarrow x) = 1 - \sum_{x' \neq x} T(x \rightarrow x')$$

הראו ש-T היא מטריצת מעברים חוקית.

ג. (11 נקודות) הראו ש- $P(X)$  היא ההתפלגות הסטציונארית של T (ניתן להניח ללא הוכחה שקיימת התפלגות סטציונארית יחידה). רמז: השתמשו בתכונת ה-Detailed Balance שראינו בכיתה.

### שאלה 4: למידה

נניח ובידינו רשת בייסינית A שנלמדה מאוסף דוגמאות  $D_A$  ורשת בייסיאנית B שנלמדה מאוסף דוגמאות  $D_B$ , שתיהן מעל אותו אוסף משתנים ועם טבלאות מלאות. נדגיש שבידינו רק הרשתות שנלמדו ואין גישה לנתונים עצמם, מלבד מספר הדוגמאות  $M_A$  ו- $M_B$ .

א. (8 נקודות) נניח ולרשתות A, B אותו המבנה בדיוק וגם ידוע כי כל הדוגמאות ב- $D_A$  וגם ב- $D_B$  היו מלאות (ללא ערכים חסרים). ברצוננו לבנות רשת C בעלת אותו מבנה, אך אם פרמטרים יותר טובים. הסבירו כיצד לעשות זאת ומדוע אנו מצפים ש-C תהיה טובה יותר. שימו לב שאין הכרח שהשיטה שלכם תוביל תמיד לפרמטרים טובים יותר, אלא רק שזה מה שהיינו מצפים בממוצע.

ב. (15 נקודות) נניח שוב שלרשתות A, B אותו המבנה אך ידוע כי ב- $D_A$  וב- $D_B$  גם ערכים חסרים. הסבירו (או המחישו על ידי דוגמה) מדוע לא ניתן באופן כללי להשתמש בטכניקה של סעיף א' על מנת ללמוד רשת יותר טובה C.

ג. (10 נקודות) נניח שוב שאין ערכים חסרים, אך לרשתות A ו-B מבנה שונה ואנו רוצים ללמוד רשת C כך שיהיה לה אותו מבנה של A, אך פרמטרים יותר טובים. הסבירו כיצד לעשות זאת במקרה זה.

שאלה 5: Reinforcement Learning

א. (12 נקודות) בכיתה הגדרנו את ה-reward הכולל המשמש לעדכון מונטה קרלו  
 TD-error-ה  $G_t = R_t + \gamma R_{t+1} + \gamma^2 R_{t+2} \dots$  . כמו כן הגדרנו את ה- $\delta_t = R_t + \gamma V_t(S_{t+1}) - V_t(S_t)$

הראו שטעות המונטה קרלו  $G_t - V_t(S_t)$  שווה ל  $\sum_{k=t} \gamma^{k-t} \delta_k$  כאשר  $V$  כבר לא משתנה בין שלב לשלב.

ב. (8 נקודות) בכיתה גם ראינו את עדכון TD עבור  $n$  צעדים:

$$V_{t+n}(S_t) = V_{t+n-1}(S_t) + \alpha [R_t + \gamma R_{t+1} + \dots + \gamma^n V_{t+n-1}(S_{t+n}) - V_{t+n-1}(S_t)]$$

הראו שגם במקרה זה אפשר לכתוב את הטעות כסכום של ה TD-error כאשר  $V$  כבר לא משתנה.

ג. (13 נקודות) נניח ואנו רוצים ללמוד פונקציית ערך עבור משימת נסיעה מהעבודה לבית. מלבד מצב ההתחלה (יציאה מהעבודה) ומצב סיום (הגעה לבית), ישנם שלושה מצבים: תחילת נסיעה, עליה לכביש המהיר, ירידה מהכביש המהיר. הפרסים (rewards) הם זמני כל מקטע (עם  $\gamma = 1$ ), ופונקציית הערך מייצגת את הזמן הצפוי עד להגעה הביתה. נניח כי אספנו אפיסודות רבות במשך השנה וכעת החלפנו עבודה. המסלול מהעבודה החדשה לבית זהה למסלול של העבודה הקודמת, מלבד הקטע שבין העבודה לכביש המהיר - שני המצבים הראשונים הם חדשים, ולאחריהם מגיעים לאותה כניסה לכביש המהיר. (ניתן להניח כי אין הבדל בפקקים בגלל הבדלים קלים בשעת ההגעה אליו). הדגימו (בעזרת אפיסודות בעבודה הקודמת והחדשה) מדוע במקרה זה יכול להיות יתרון גדול לשימוש ב- TD(0) על פני שיטת Monte Carlo.



