האוניברסיטה העברית בירושלים
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

אלגוריתמים בביו' חישובית

76558

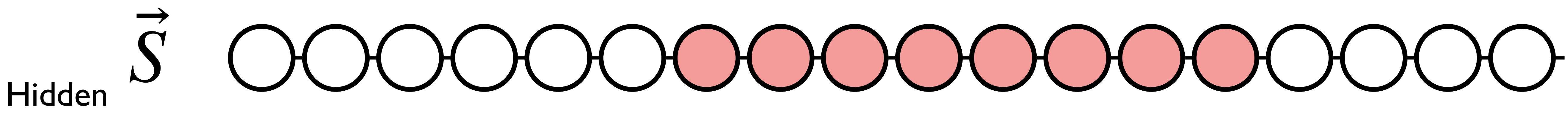
חישובי נראות והסקה

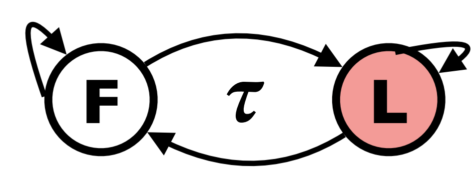
תומי קפלן

21/1/2024

שרשראות מרקוב חבויות

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)





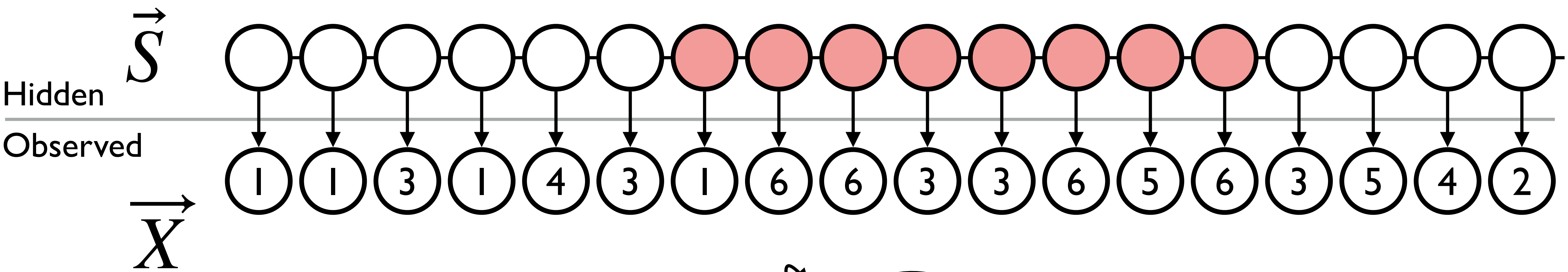
$$S_i \in \{F, L\}$$

$$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%

שרשראות מרקוב חבויות

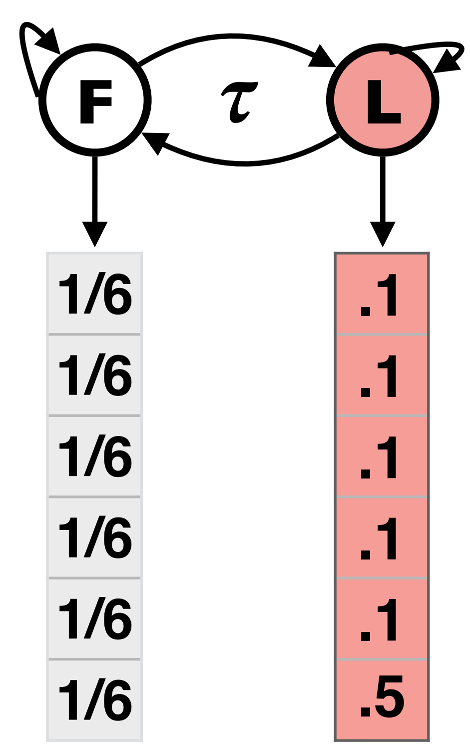
- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים [בהתאם למצב] משתנים אחרים [ניצפים]



$S_i \in \{F, L\}$

$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%



$\forall_k,\ e_F(k) = \frac{1}{6}$

$e_L(k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 1,\ldots,5 \\ \frac{1}{2} & k = 6 \end{cases}$

$X_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

מה עוד היינו רוצים לדעת?

- פוסטריור על מצב חבוי

$$P(S_i \mid X_1, \ldots, X_n)$$

האם סביר שהיינו במצב מסויים בזמן i

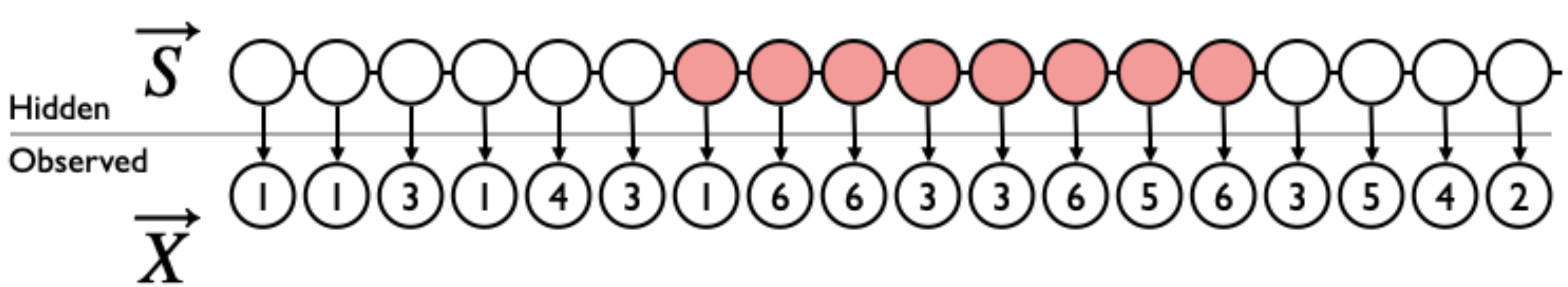
- פוסטריור על מעבר חבוי

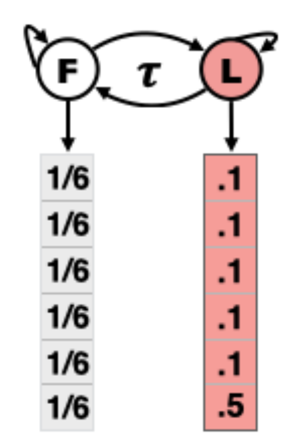
$$P(S_{i-1}, S_i \mid X_1, \ldots, X_n)$$

- מסלול ויטרבי

$$\arg\max_{S_1,\ldots,S_n} P(S_1, \ldots, S_n, X_1, \ldots, X_n)$$

MPE / decoding





מחשבים חישובים!

- נִראוּת המסלול החבוי

$$P(S_1,\ldots,S_n)=\prod_{i=1}^{n}P(S_i\,|\,S_{i-1})=\prod_{i=1}^{n}\tau_{S_{i-1},S_i}$$

- נִראוּת מלאה

$$P(S_1,\ldots,S_n,X_1,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}P(S_i\,|\,S_{i-1})P(X_i\,|\,S_i)$$

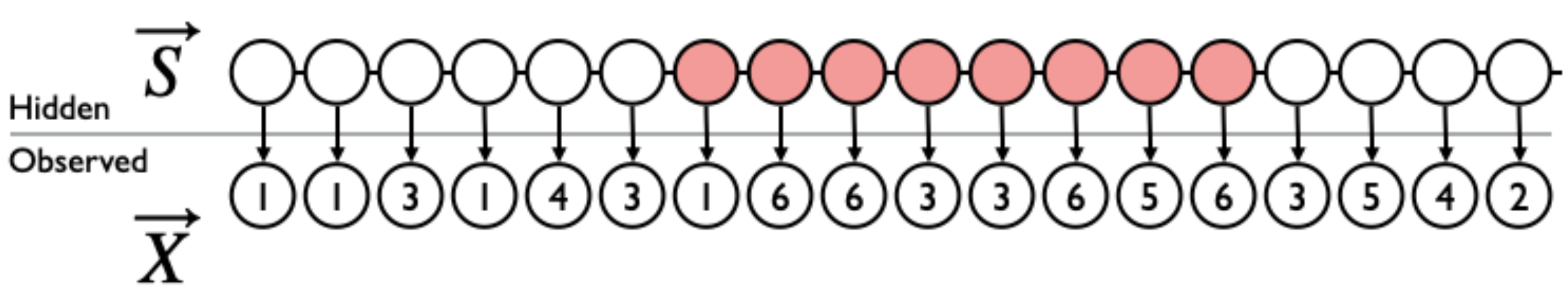
$$=\prod_{i=1}^{n}\tau_{S_{i-1},S_i}\cdot \mathsf{e}_{S_i}(X_i)$$

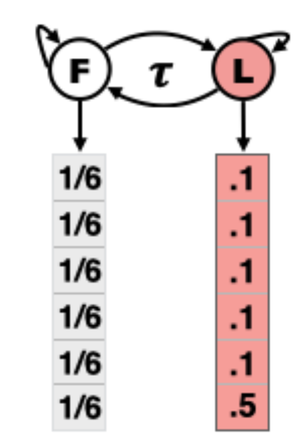
- נִראוּת התצפיות

$$P(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{S_1}\sum_{S_2}\cdots\sum_{S_N}P(X_1,\ldots,X_n,S_1,\ldots,S_n)$$

$$=\underline{\sum_{S_1}\sum_{S_2}\cdots\sum_{S_N}}\prod_{i=1}^{n}P(S_i\,|\,S_{i-1})P(X_i\,|\,S_i)$$

כמה מסובך לחשב?



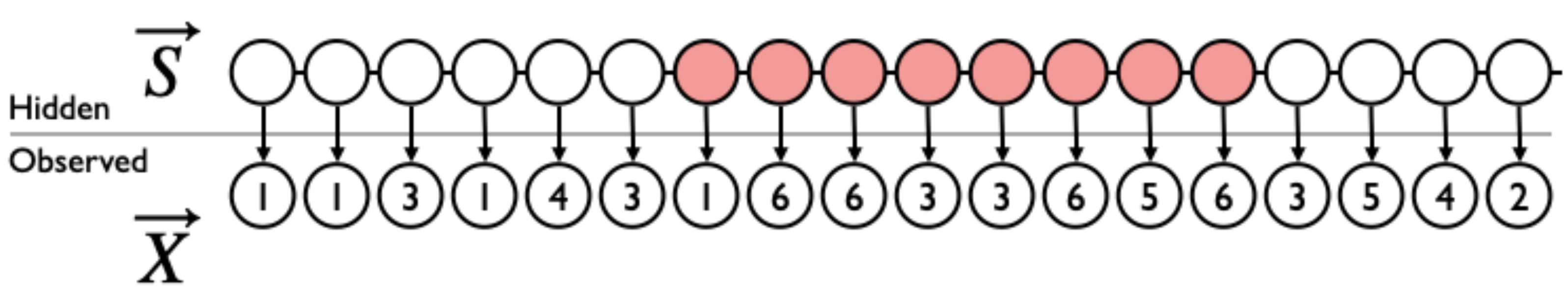


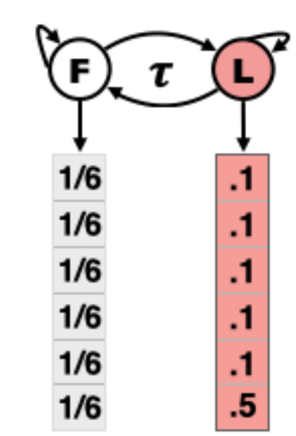
חישוב נראות בזמן לינארי?

- נראות התצפיות
$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\vec{S}} P(\overrightarrow{X} \mid \vec{S}) \cdot P(\vec{S})$$

- עלינו לסכום את הנראות מכל המסלולים האפשריים על פני המצבים החבויים (מספר אקספוננציאלי!)

- פתרון חכם: ננצל את תכונת המרקוביות, ונבטא כבעיית תכנון דינאמי, בעזרת סכומים חלקיים של רישאות המסלולים





האוניברסיטה
העברית
בירושלים
THE HEBREW
UNIVERSITY
OF JERUSALEM

אלגוריתמים בביו' חישובית

76558

חישובי נראות והסקה

תומי קפלן

30/1/2024

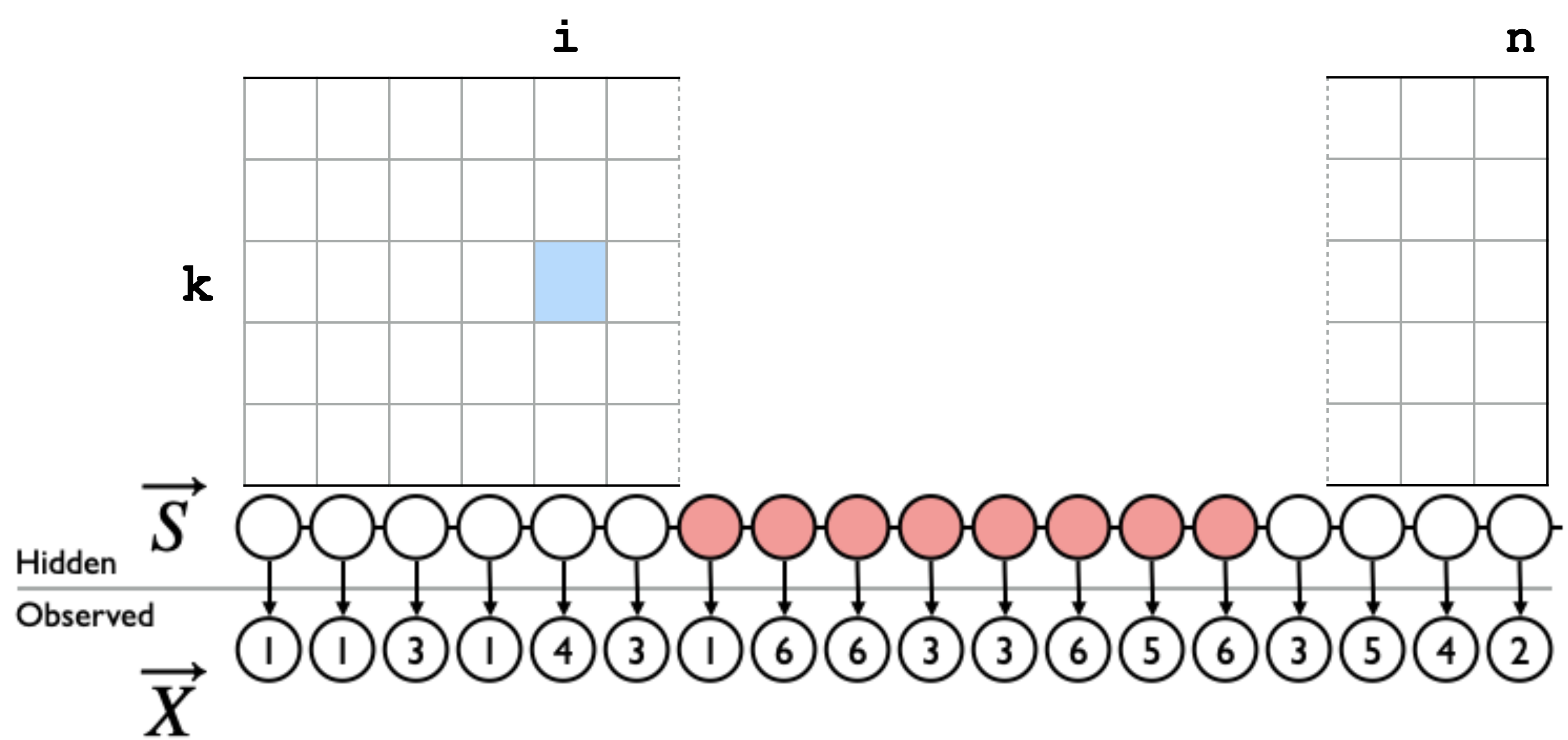
חישוב ניראות: אלגו' Forward

- נמלא טבלה עם k שורות (מספר המצבים החבויים) ו-n עמודות (אורך הסדרה).

- נגדיר: $F_k(i) = P(X_1, \ldots, X_i, S_i = k)$

  הסיכוי לרישא $X_{1..i}$, שמסתיימת במצב $S_i=k$

- וכעת נשתמש בעמודה ה-i כדי למלא את העמודה i+1



חישוב נראות בזמן ליניארי?

- נגדיר: $F_k(i) = P(X_1, \ldots, X_i, S_i = k)$

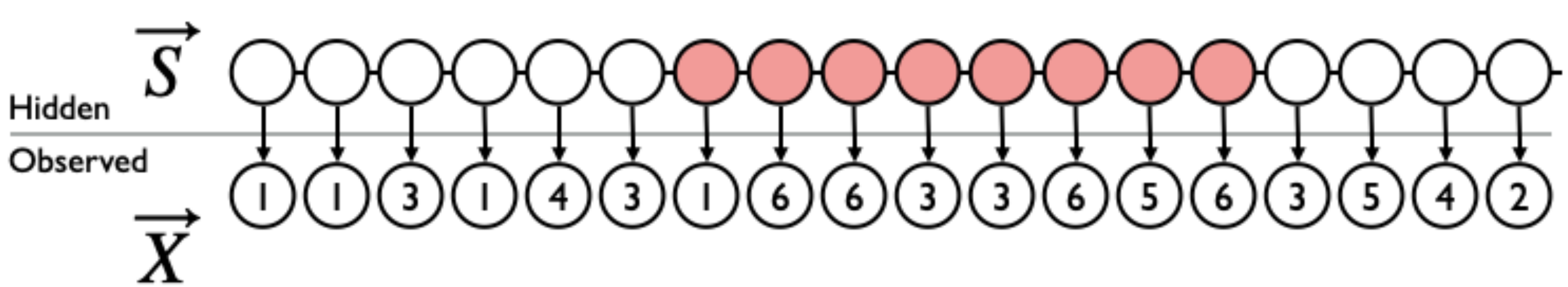
- נפתח רקורסיבית את $F_l(i+1) = P(X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}, S_{i+1} = l)$

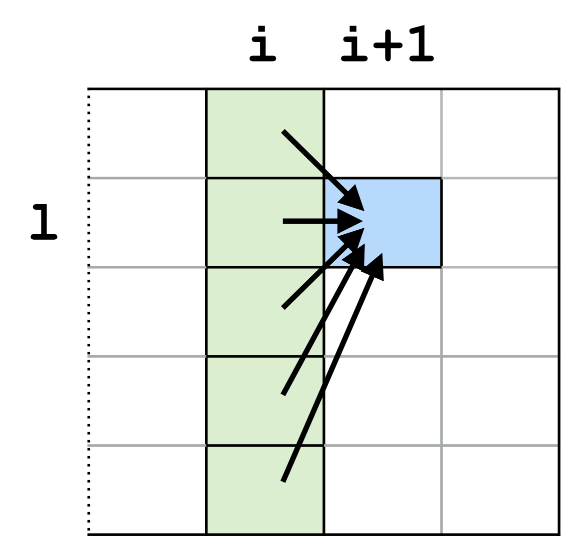
$$= \sum_k P(X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}, S_i = k, S_{i+1} = l)$$

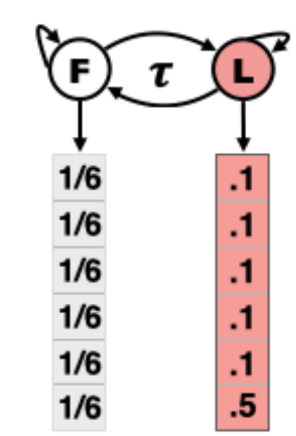
$$= \sum_k P(X_1, \ldots, X_i, S_i = k) \cdot P(S_{i+1} = l \,|\, X_1, \ldots, X_i, S_i = k) \cdot P(X_{i+1} \,|\, X_1, \ldots, X_i, S_i = k, S_{i+1} = l)$$

$$= \sum_k \left[P(X_1, \ldots, X_i, S_i = k) \cdot P(S_{i+1} = l \,|\, S_i = k)\right] \cdot P(X_{i+1} \,|\, S_{i+1} = l)$$

$$= \sum_k \left[F_k(i) \cdot \tau_{k,l}\right] \cdot \mathrm{e}_l(X_{i+1})$$







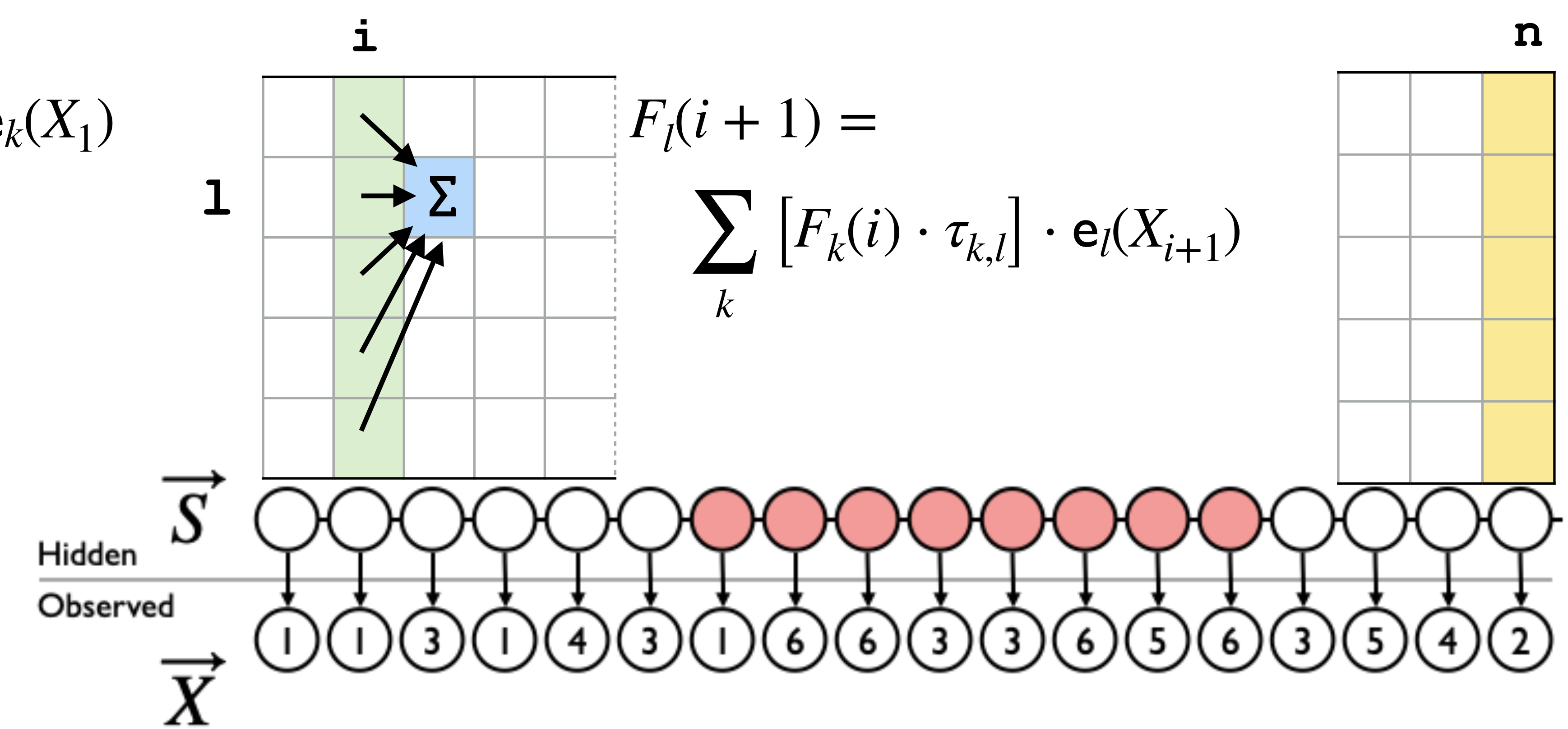
חישוב ניראות: אלגו' Forward

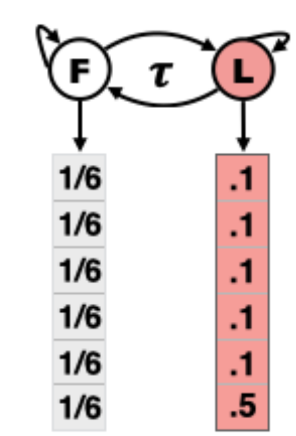
- זמן ריצה: O[n]
- אתחול
- והניראות?

$$\sum_k F_k(n) = \sum_k P(X_1, \ldots, X_n, S_n = k) = P(X_1, \ldots, X_n) = P(\vec{X}) = \sum_{\vec{S}} P(\vec{X} \,|\, \vec{S}) \cdot P(\vec{S})$$

$$F_k(1) = P_0(k) \cdot \mathrm{e}_k(X_1)$$

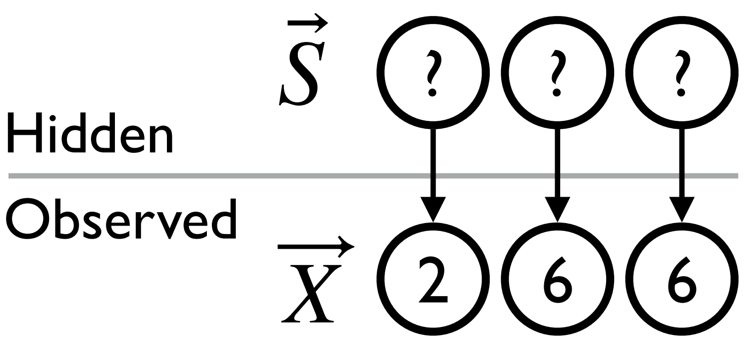
$$F_l(i+1) = \sum_k \left[F_k(i) \cdot \tau_{k,l}\right] \cdot \mathrm{e}_l(X_{i+1})$$





דוגמת צעצוע

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)



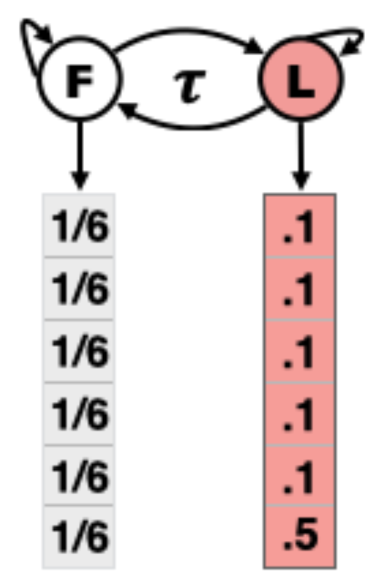
F	$P_0(F) \cdot$ $e_F(2)$		
L	$P_0(L) \cdot$ $e_L(2)$		
	2	6	6

$$S_i \in \{F, L\}$$

$$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%

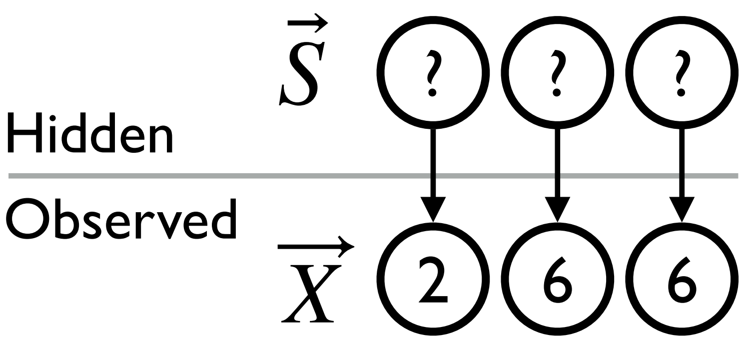
$$\forall_k,\ e_F(k) = \frac{1}{6}$$



$$e_L(k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 1,\ldots,5 \\ \frac{1}{2} & k = 6 \end{cases}$$

דוגמת צעצוע

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)



F	0.0833		
L	0.05		
	2	6	6

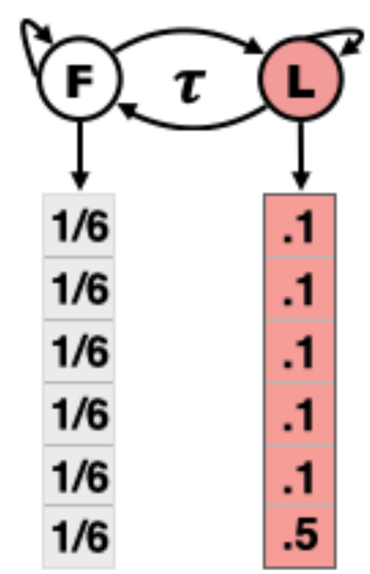
$$F_l(i+1) = \sum_k F_k(i) \cdot \tau_{k,l} \cdot \mathrm{e}_{S_{i+1}}(l)$$

$$S_i \in \{F, L\}$$

$$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%

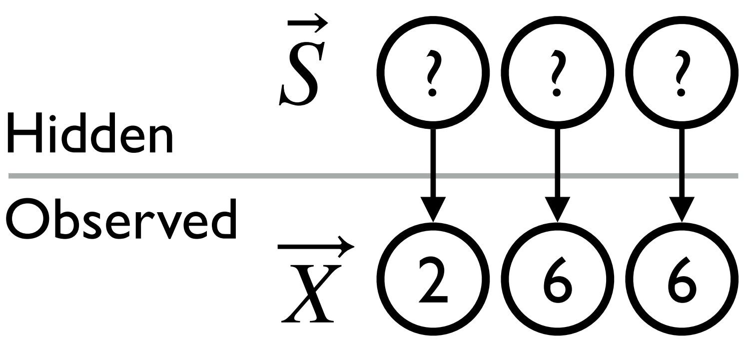
$$\forall_k,\ \mathrm{e}_F(k) = \frac{1}{6}$$



$$\mathrm{e}_L(k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 1,\ldots,5 \\ \frac{1}{2} & k = 6 \end{cases}$$

דוגמת צעצוע

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)



F	0.0833	0.014	
L	0.05	0.024	
	2	6	6

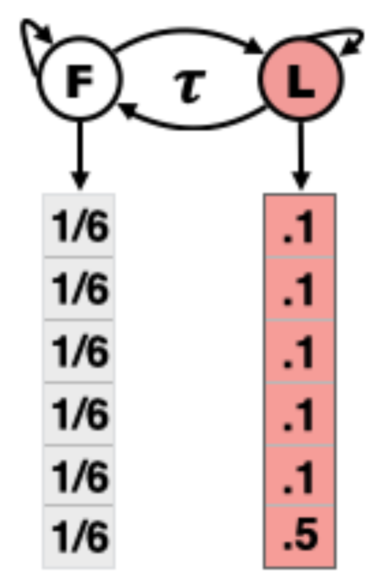
$$F_l(i+1) = \sum_k F_k(i) \cdot \tau_{k,l} \cdot \mathrm{e}_{S_{i+1}}(l)$$

$$S_i \in \{\mathrm{F}, \mathrm{L}\}$$

$$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%

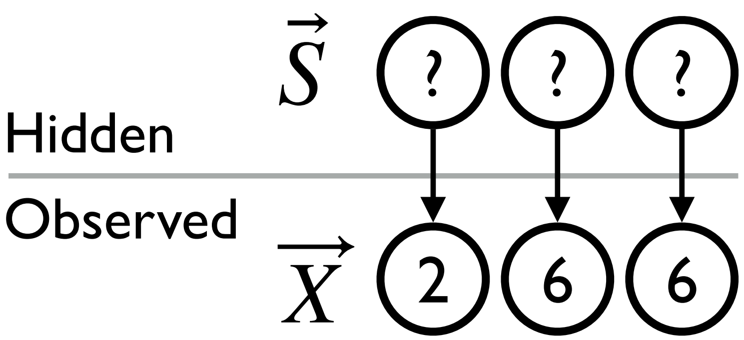
$$\forall_k,\ \mathrm{e}_F(k) = \frac{1}{6}$$



$$\mathrm{e}_L(k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 1,\ldots,5 \\ \frac{1}{2} & k = 6 \end{cases}$$

דוגמת צעצוע

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)



F	0.0833	0.014	0.0025
L	0.05	0.024	0.0116
	2	6	6

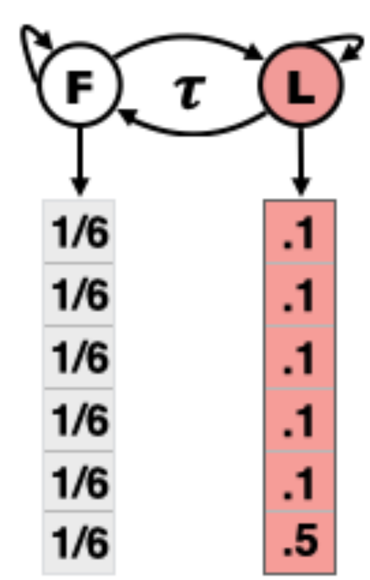
$$F_l(i+1) = \sum_k F_k(i) \cdot \tau_{k,l} \cdot e_{S_{i+1}}(l)$$

$$S_i \in \{F, L\}$$

$$\tau = P(S_i \mid S_{i-1})$$

τ	F	L
F	99%	1%
L	5%	95%

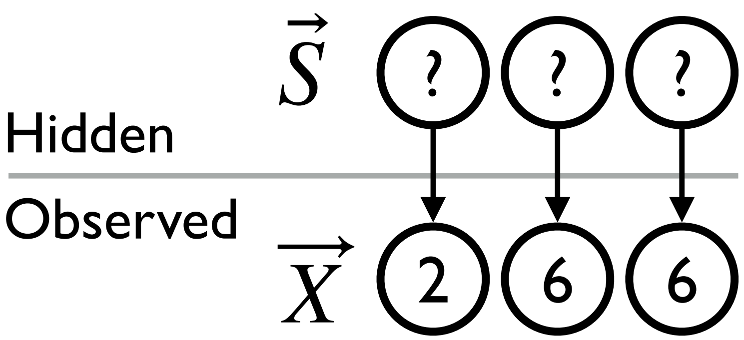
$$\forall_k,\ e_F(k) = \frac{1}{6}$$



$$e_L(k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 1,\ldots,5 \\ \frac{1}{2} & k = 6 \end{cases}$$

דוגמת צעצוע

- משתני התהליך המרקובי הם חבויים
- פולטים (בהתאם למצבם) משתנים אחרים (ניצפים)



F	0.0833	0.014	0.0025
L	0.05	0.024	0.0116
	2	6	6

$$P(\vec{X}) = \sum_k F_k(n) = 0.01409$$

$$P(S_n \mid \vec{X}) = \frac{P(S_n, \vec{X})}{P(\vec{X})} = \frac{F_{S_n}(n)}{\sum_k F_k(n)}$$

$$P(S_3 = L \mid \{2,6,6\}) = \frac{0.01155}{0.01409} \sim 82\,\%$$

הערת יישום

- ככל שהסדרה תתארך, כך גם יקטן. מאוד. איך נמנע מטעויות underflow?

$$F_k(i) = P(X_1, \ldots, X_i, S_i = k)$$

- אופציה א' – לשמור את לוג המספרים

$$lp = \log p \qquad lq = \log q$$

$$r = p + q \qquad lr = \log r = \log(p+q) \quad = \log(\exp(lp) + \exp(lq))$$

$$= \log(\exp(lp) \cdot (1 + \frac{\exp(lq)}{\exp(lp)}) = lp + \log(1 + \exp(lq - lp))$$

- אופציה ב' – לנרמל את F [כל עמודה תסכם ל-1], ולשמור את וקטור לוג הנורמליזציות. [בונוס – זוהי סידרת לוג ניראות הרישאות!]