



האוניברסיטה
העברית
בירושלים
THE HEBREW
UNIVERSITY
OF JERUSALEM

אלגוריתמים בביו' חישובית

76558

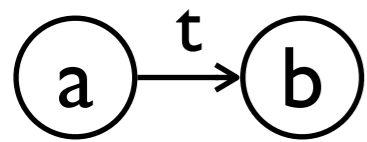
מודלים מרקוביים בזמן רציף

תומי קפלן

6/2/2024

מודל מרקובי בזמן רציף

- נדמיון רצף דג"א באורך 1



- מה הסיכוי שהאות a תשתנה ל- b בזמן t

- אילוצים למודל זמן רציף

$$P(a \xrightarrow{0} b) = P_0(a \rightarrow b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. עבור זמן אפס:

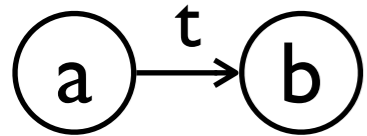
$$P(a \xrightarrow{t_1+t_2} b) = \sum_c \left[P(a \xrightarrow{t_1} c) \cdot P(c \xrightarrow{t_2} b) \right]$$

2. תכונת המרקוביות

$$\text{Diagram: } \textcircled{a} \xrightarrow{t_1+t_2} \textcircled{b} = \sum \textcircled{a} \xrightarrow{t_1} \textcircled{c} \xrightarrow{t_2} \textcircled{b}$$

$$p(a \rightarrow b) = p(b|a) = \frac{p(a,b)}{p(a)} = \sum_c \frac{p(a,c,b)}{p(a)} = \sum_c \frac{p(a)p(c|a)p(b|c,a)}{p(a)} = \sum_c p(c|a)p(b|c) = \sum_c p(a \rightarrow c)p(c \rightarrow b)$$

מודל מרקובי בזמן רציף



• נגדיר את מטריצת הסתברויות המעבר בזמן t

$$[P(t)] = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_t(A \rightarrow A) & P_t(A \rightarrow C) & P_t(A \rightarrow G) & P_t(A \rightarrow T) \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_t(C \rightarrow A) & P_t(C \rightarrow C) & P_t(C \rightarrow G) & P_t(C \rightarrow T) \\ P_t(G \rightarrow A) & P_t(G \rightarrow C) & P_t(G \rightarrow G) & P_t(G \rightarrow T) \\ P_t(T \rightarrow A) & P_t(T \rightarrow C) & P_t(T \rightarrow G) & P_t(T \rightarrow T) \end{matrix} & \end{matrix} = \begin{matrix} P_t & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{G} & \mathbf{T} \\ \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{G} & & & & \\ \mathbf{T} & & & & \end{matrix}$$

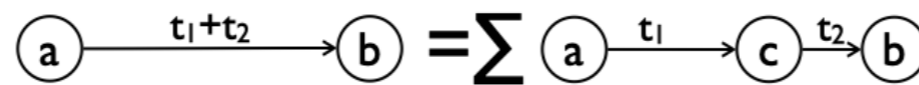
$$\forall_{a,b} P_t(a \rightarrow b) \geq 0$$

$$\forall_a \sum_b P_t(a \rightarrow b) = 1$$

$$[P(0)] = \begin{matrix} P_0 & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{G} & \mathbf{T} \\ \mathbf{A} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{G} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{T} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

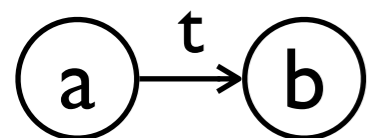
$$P(a \xrightarrow{t_1+t_2} b) = \sum_c \left[P(a \xrightarrow{t_1} c) \cdot P(c \xrightarrow{t_2} b) \right]$$

ולפי תכונת המרקוביות:



$$[P(t_1+t_2)]_{C,G} = \begin{matrix} P(t_1) & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{G} & \mathbf{T} \\ \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{G} & & & & \\ \mathbf{T} & & & & \end{matrix} \times \begin{matrix} P(t_2) & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{G} & \mathbf{T} \\ \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{G} & & & & \\ \mathbf{T} & & & & \end{matrix}$$

מודל מרקובי בזמן רציף



• נגדיר את מטריצת הסתברויות המעבר בזמן t

$$[P(t)] = \begin{bmatrix} P_t(A \rightarrow A) & P_t(A \rightarrow C) & P_t(A \rightarrow G) & P_t(A \rightarrow T) \\ P_t(C \rightarrow A) & P_t(C \rightarrow C) & P_t(C \rightarrow G) & P_t(C \rightarrow T) \\ P_t(G \rightarrow A) & P_t(G \rightarrow C) & P_t(G \rightarrow G) & P_t(G \rightarrow T) \\ P_t(T \rightarrow A) & P_t(T \rightarrow C) & P_t(T \rightarrow G) & P_t(T \rightarrow T) \end{bmatrix} = \begin{matrix} P_t & \begin{matrix} A & C & G & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \\ G \\ T \end{matrix} & \begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\forall_{a,b} P_t(a \rightarrow b) \geq 0$$

$$\forall_a \sum_b P_t(a \rightarrow b) = 1$$

• או באופן כללי: $P(0) = I$ $[P(t_1+t_2)] = [P(t_1)] \cdot [P(t_2)]$

• ומכאן ψ : $[P(2t)] = [P(t)]^2$ $[P(nt)] = [P(t)]^n$

• ובהנתן ε קטן כרצוננו, לכל t , נחשב את n כך ψ : $t = n \cdot \varepsilon$

$$[P(t)] = [P(\varepsilon)]^{t/\varepsilon} = [P(\varepsilon)]^n$$

מודל מרקובי בזמן רציף

- לכל זמן t , נוכל לחשב את מטריצת המעברים $P[t]$, כלומר את ההסתברות שאות כלשהי תתחלף לאחרת
- כל שנותר לנו, הוא לשערך את המטריצה $P[\varepsilon]$

בעיה 1 - איד?

בעיה 2 - העלאת מטריצות בחזקה זה יקר

בעיה 3 - מצאנו פתרון ל- \mathbb{N} ולא ל- \mathbb{R}

והפתרון?

בשיעור הבא!

בואו ניזכר במושג הנגזרת

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(t)}{\partial t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(t + \epsilon) - P(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(t) \cdot P(\epsilon) - P(t)}{\epsilon} \\ &= P(t) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(\epsilon) - I}{\epsilon} = P(t) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(0 + \epsilon) - P(0)}{\epsilon} \\ &= P(t) \cdot \frac{\partial P(0)}{\partial t}\end{aligned}$$

• כלומר קיבלנו משוואה דיפרנציאלית פשוטה

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot \frac{\partial P(0)}{\partial t} \triangleq P(t) \cdot R \quad \text{[מטריצת קצב]}$$

משוואה דיפרנציאלית פשוטה

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot R \quad P(0) = I$$

$$\begin{cases} f'(x) = a \cdot f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

• אבל רגע, המשוואה הזו מוכרת לנו

• ופתרונה $f(x) = e^{ax}$

• ובאופן דומה, עבור המקרה שלנו $P(t) = e^{[tR]}$

[כלומר את הנגזרת, או
מטריצת קצב השינוי ב-P]

• כלומר, אם נדע לחשב את $R \triangleq \frac{\partial P(0)}{\partial t}$

נוכל לחשב את $P[a \rightarrow b]$ לכל זמן t

אקספוננט של מטריצה!?

• מה זה $P(t) = e^{[tR]}$

• ניזכר בפיתוח טיילור $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$

• ומכאן ש $e^{tR} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tR)^n}{n!} = I + tR + \frac{(tR)^2}{2} + \frac{(tR)^3}{6} + \dots$

• ותמיד (בהנתן R) נוכל לחשב את $P[t]$ בקלות, בעזרת טור טיילור וחזקות של מטריצות

• בונים: אם tR סימטרית, אזי $tR = UDU^T$ היא הפירוק הספקטרלי של tR ($U^T U = I$, D אלכסונית), ואז גם $[tR]^n = U D^n U^T$, ומכאן ש $e^{[tR]} = U e^D U^T$ כאשר e^D אלכסונית וקלה לחישוב