האוניברסיטה העברית בירושלים
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

אלגוריתמים בביו' חישובית
76558

מודלים מרקוביים בזמן רציף

תומי קפלן

6/2/2024

מודל מרקובי בזמן רציף

- נדמיין רצף דנ"א באורך 1
- מה הסיכוי שהאות a תשתנה ל-b בזמן t

$$a \xrightarrow{t} b$$

- אילוצים למודל זמן רציף

1. עבור זמן אפס:

$$P(a \overset{0}{\rightarrow} b) = P_0(a \rightarrow b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. תכונת המרקוביות

$$P(a \overset{t_1+t_2}{\rightarrow} b) = \sum_c \left[P(a \overset{t_1}{\rightarrow} c) \cdot P(c \overset{t_2}{\rightarrow} b) \right]$$

$$a \xrightarrow{t_1+t_2} b = \sum a \xrightarrow{t_1} c \xrightarrow{t_2} b$$

$$p(a \rightarrow b) = p(b \mid a) = \frac{p(a,b)}{p(a)} = \sum_c \frac{p(a,c,b)}{p(a)} = \sum_c \frac{p(a)p(c \mid a)p(b \mid c, \cancel{a})}{p(a)} = \sum_c p(c \mid a)p(b \mid c) = \sum_c p(a \rightarrow c)p(c \rightarrow b)$$

מודל מרקובי בזמן רציף

$a \xrightarrow{t} b$

- נגדיר את מטריצת הסתברויות המעבר בזמן t

[P(t)]=

$P_t(A \to A)$	$P_t(A \to C)$	$P_t(A \to G)$	$P_t(A \to T)$
$P_t(C \to A)$	$P_t(C \to C)$	$P_t(C \to G)$	$P_t(C \to T)$
$P_t(G \to A)$	$P_t(G \to C)$	$P_t(G \to G)$	$P_t(G \to T)$
$P_t(T \to A)$	$P_t(T \to C)$	$P_t(T \to A)$	$P_t(T \to T)$

=

P_t	A	C	G	T
A				
C				
G				
T				

$$\forall_{a,b}\ P_t(a \to b) \geq 0$$

$$\forall_a\ \sum_b P_t(a \to b) = 1$$

[P(0)]=

P_0	A	C	G	T
A	1	0	0	0
C	0	1	0	0
G	0	0	1	0
T	0	0	0	1

ולפי תכונת המרקוביות:

$$P(a \overset{t_1+t_2}{\to} b) = \sum_c \left[P(a \overset{t_1}{\to} c) \cdot P(c \overset{t_2}{\to} b) \right]$$

$$a \xrightarrow{t_1+t_2} b = \sum a \xrightarrow{t_1} c \xrightarrow{t_2} b$$

$[P(t_1+t_2)]_{C,G}$=

$P(t_1)$	A	C	G	T
A				
C				
G				
T				

X

$P(t_2)$	A	C	G	T
A				
C				
G				
T				

מודל מרקובי בזמן רציף

- נגדיר את מטריצת הסתברויות המעבר בזמן t

$$a \xrightarrow{t} b$$

$[P(t)]=$

$P_t(A\rightarrow A)$	$P_t(A\rightarrow C)$	$P_t(A\rightarrow G)$	$P_t(A\rightarrow T)$
$P_t(C\rightarrow A)$	$P_t(C\rightarrow C)$	$P_t(C\rightarrow G)$	$P_t(C\rightarrow T)$
$P_t(G\rightarrow A)$	$P_t(G\rightarrow C)$	$P_t(G\rightarrow G)$	$P_t(G\rightarrow T)$
$P_t(T\rightarrow A)$	$P_t(T\rightarrow C)$	$P_t(T\rightarrow A)$	$P_t(T\rightarrow T)$

=

P_t	**A**	**C**	**G**	**T**
A				
C				
G				
T				

$$\forall_{a,b}\ P_t(a \rightarrow b) \geq 0$$

$$\forall_a \sum_b P_t(a \rightarrow b) = 1$$

- או באופן כללי:

$$[P(t_1+t_2)] = [P(t_1)]\cdot[P(t_2)] \qquad P(0) = I$$

- ומכאן ש:

$$[P(2t)] = [P(t)]^2 \quad [P(nt)] = [P(t)]^n$$

- ובהנתן ε קטן כרצוננו, לכל t, נחשב את n כך ש: $t=n\cdot\varepsilon$

$$[P(t)] = [P(\varepsilon)]^{t/\varepsilon} = [P(\varepsilon)]^n$$

מודל מרקובי בזמן רציף

- לכל זמן t, נוכל לחשב את מטריצת המעברים $P[t]$, כלומר את ההסתברות שאות כלשהי תתחלף לאחרת
- כל שנותר לנו, הוא לשערך את המטריצה $P[\varepsilon]$

בעיה 1 – איך?

בעיה 2 – העלאת מטריצות בחזקה זה יקר

בעיה 3 – מצאנו פתרון ל-$\mathbb{N}$ ולא ל-$\mathbb{R}$

והפתרון?

בשיעור הבא!

בואו ניזכר במושג הנגזרת

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(t+\epsilon) - P(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(t) \cdot P(\epsilon) - P(t)}{\epsilon}$$

$$= P(t) \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(\epsilon) - I}{\epsilon} = P(t) \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(0+\epsilon) - P(0)}{\epsilon}$$

$$= P(t) \cdot \frac{\partial P(0)}{\partial t}$$

- כלומר קיבלנו משוואה דיפרנציאלית פשוטה

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot \frac{\partial P(0)}{\partial t} \triangleq P(t) \cdot R$$ [מטריצת קצב]

משוואה דיפרנציאלית פשוטה

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot R \qquad P(0) = I$$

- אבל רגע, המשוואה הזו מוכרת לנו $\begin{cases} f'(x) = a \cdot f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$
- ופתרונה $f(x) = e^{ax}$
- ובאופן דומה, עבור המקרה שלנו $P(t) = e^{[tR]}$
- כלומר, אם נדע לחשב את $R \triangleq \frac{\partial P(0)}{\partial t}$ [כלומר את הנגזרת, או מטריצת קצב השינוי ב-P]

נוכל לחשב את P[a→b] לכל זמן t

אקספוננט של מטריצה?!

- מה זה $P(t) = e^{[tR]}$
- ניזכר בפיתוח טיילור $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$
- ומכאן ש $e^{tR} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tR)^n}{n!} = I + tR + \frac{(tR)^2}{2} + \frac{(tR)^3}{6} + \dots$
- ותמיד (בהנתן R) נוכל לחשב את P(t) בקלות, בעזרת טור טיילור וחזקות של מטריצות

- בונוס: אם tR סימטרית, אזי $tR=UDU^T$ היא הפירוק הספקטרלי של tR ($U^TU=I$, D אלכסונית), ואז גם $(tR)^n=UD^nU^T$, ומכאן ש- $e^{(tR)}=Ue^DU^T$ כאשר e^D אלכסונית וקלה לחישוב